Übungsblatt 6 - Lösung

Aufgabe 1

a) Es sei $f(x)$ eine differenzierbare Funktion im Intervall I. Es gilt dann:

- $f'(x) > 0$ für alle $x \in I \quad \Rightarrow \quad f(x)$ ist auf I wachsend
- $f'(x) < 0$ für alle $x \in I \quad \Rightarrow \quad f(x)$ ist auf I fallend

b) Es sei $f : D(f) \to \mathbb{R}$ eine Funktion.

- f hat ein absolutes Maximum an der Stelle x_0 , wenn
$$f(x_0) \geq f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{D}(f) \text{ ist.}$$
- f hat ein absolutes Minimum an der Stelle x_0 , wenn
$$f(x_0) \leq f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{D}(f) \text{ ist.}$$
- Die Funktion f hat an der Stelle $x_0 \in \mathbb{D}(f)$ ein relatives Maximum, wenn es eine ϵ-Umgebung $U_\epsilon(x_0)$ gibt, so dass gilt
$$f(x_0) \geq f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{D}(f) \cap U_\epsilon(x_0) \ .$$
- Die Funktion f hat an der Stelle $x_0 \in \mathbb{D}(f)$ ein relatives Minimum, wenn es eine ϵ-Umgebung $U_\epsilon(x_0)$ gibt, so dass gilt
$$f(x_0) \leq f(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{D}(f) \cap U_\epsilon(x_0) \ .$$

Siehe auch Storrer Seite 84/85.

c) f hat in x_0 einen Wendepunkt, wenn $f''(x_0) = 0$ ist und wenn f'' in x_0 das Vorzeichen wechselt.

d) Der Terrassenpunkt ist ein horizontaler Wendepunkt. Es gilt daher zusätzlich, dass $f'(x_0) = 0$

Aufgabe 2 (9 Punkte)

a) (1 Punkt) Die e-Funktion nimmt nur positive Werte an. Somit ist die Funktion $y = x + 1$ entscheidend. Es gilt:
$f(x) < 0$ für $x < -1$ und $f(x) > 0$ für $x > -1$

b) (1 Punkt) $f(x) = (x+1) \cdot e^{-x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -1$

c) (2 Punkte)

$f'(x) = 1 \cdot e^{-x} + (x+1) \cdot e^{-x} \cdot (-1) = e^{-x} - x \cdot e^{-x} - e^{-x} = -x \cdot e^{-x}$ (1 Punkt)

Daraus folgt: Die Funktion ist steigend ($f'(x) > 0$) für $x < 0$ und die Funktion ist fallend ($f'(x) < 0$) für $x > 0$. (1 Punkt)

d) (1 Punkt) Wir erhalten aus $f'(x) = 0$ den Wert $x = 0$. Wir benötigen nun die zweite Ableitung.

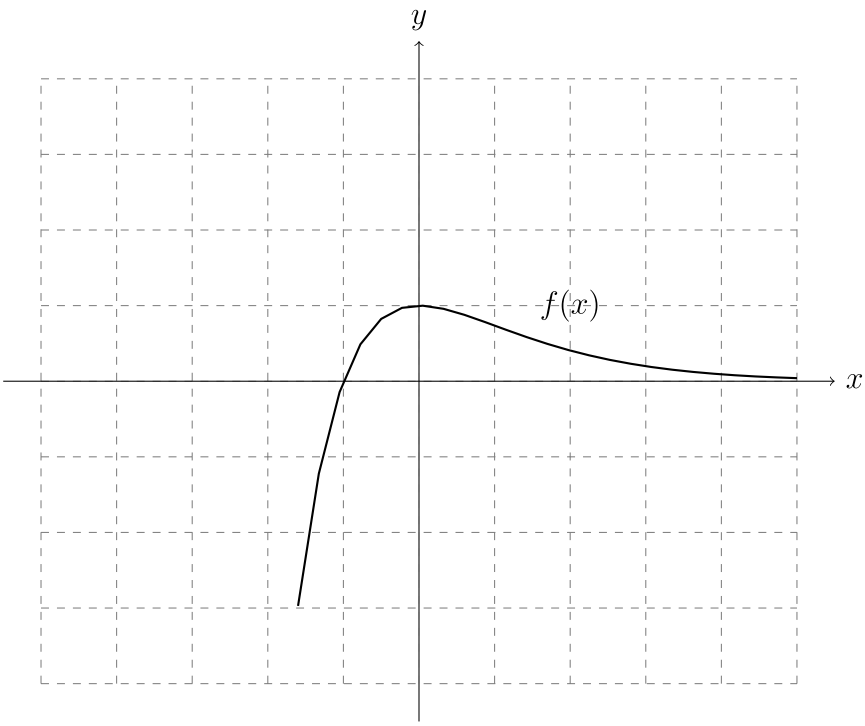
$$f''(x) = (-1) \cdot e^{-x} + (-x) \cdot e^{-x} \cdot (-1) = -e^{-x} + x \cdot e^{-x} = (x-1) \cdot e^{-x}$$

Da $f''(0) = -e^{-0} = -1 < 0$ ist, liegt bei $(0/1)$ ein relatives Maximum vor. Es ist auch das absolute Maximum.

e) (2 Punkte)
Linkskurve: $f''(x) > 0 \qquad x > 1$ (1 Punkt)
Rechtskurve: $f''(x) < 0 \qquad x < 1$ (1 Punkt)

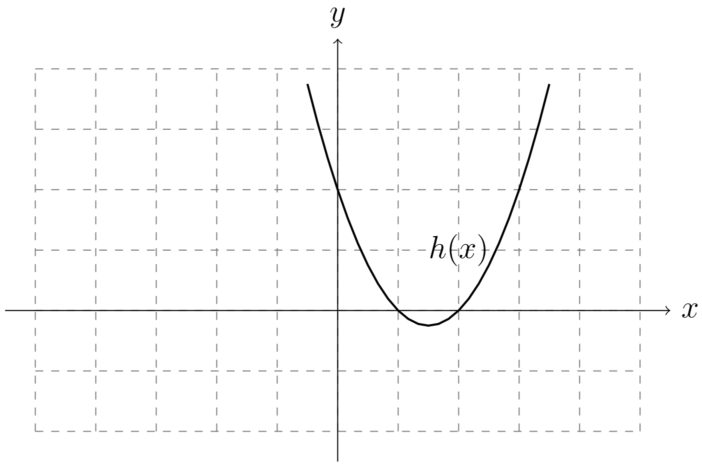
f) (1 Punkt) $f''(0) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x = 1, y = \frac{2}{e}$

g) (1 Punkt)



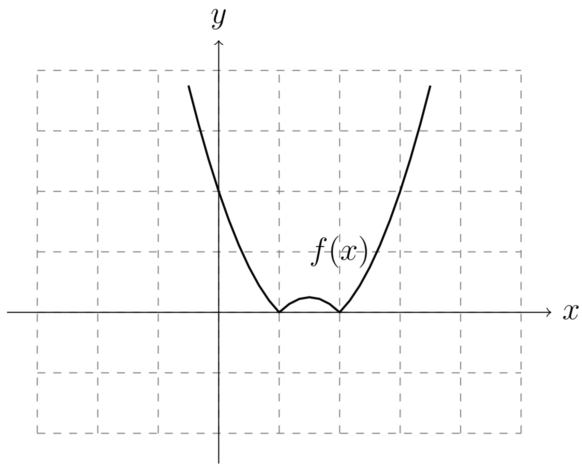
Aufgabe 3 (5 Punkte)

a) Wir betrachten zuerst die Funktion $h(x) = x^2 - 3x + 2$. Da dies eine einfache Funktion ist - Parabel zweiten Grades mit Oeffnung nach oben - und wegen $h(x) = (x-2)(x-1)$ mit Nullstellen bei $x_1 = 2$ und $x_2 = 1$, kann diese qualitativ sehr schnell gezeichnet werden. Infolge Symmetrie muss sich bei $x_s = \frac{x_1+x_2}{2} = 1.5$ der Scheitelpunkt (Extrema) befinden. (1 Punkt)



(1 Punkt)

Somit können wir die gesuchten Grössen von $f(x)$ bestimmen. Die Nullstellen liegen bei $x_1 = 2$ und $x_2 = 1$. Bei $x_s = 1.5$ liegt ein lokales (oder relatives) Maximum mit $f(x) = 0.25$ vor.
Bei den Nullstellen liegen die globalen Minimas. (1 Punkt)



(1 Punkt)

b) (1 Punkt) Betrachten wir nun die Funktion im Intervall $[0, 2]$, so bleiben die Nullstellen gleich. Die Extrema ändern sich. Bei $x = 0$ liegt ein globales Maximum vor, bei $x_s = 1.5$ liegt nach wie vor ein lokales (oder relatives) Maximum vor und bei den Nullstellen sind die globalen Minima.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Wir machen den Ansatz $y = ax^2 + bx + c$. (1 Punkt)

Die Ableitung ist dann $y' = 2ax + b$. (1 Punkt)

Aus den gegeben Bedingungen erhält man folgende Gleichungen: (1 Punkt)

$$\begin{aligned} a + b + c &= 3 && (1) \\ 2a + b &= 1 && (2) \\ 4a + b &= 5 && (3) \end{aligned}$$

Aus (3)-(2) erhält man $2a = 4$ und somit $a = 2$. Aus (2) folgt sofort $b = -3$ und aus (3) dann $c = 4$.
Die Funktionsgleichung lautet dann $y = 2x^2-3x+4$. (1 Punkt)

Aufgabe 5 (2 Punkte) Mit $y = f(x) = \frac{1}{x^2}$ und $y' = f'(x) = -\frac{2}{x^3}$ erhält man für $x_0 = 0,01$ die linearisierte Funktion

$$\begin{aligned} y = g(x) =& f(0,01) + f'(0,01)(x - 0,01) = 10^4 - 2 \cdot 10^6 (x - 0,01) \\ =& 10^4 - 2 \cdot 10^6 \cdot x + 2 \cdot 10^4 = 3 \cdot 10^4 - 2 \cdot 10^6 \cdot x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(0,0001) =& 3 \cdot 10^4 - 2 \cdot 10^6 \cdot 10^{-4} = 3 \cdot 10^4 - 2 \cdot 10^2 = 30000 - 200 = 29800 \\ f(0.0001) =& \frac{1}{(10^{-4})^2} = \frac{1}{10^{-8}} = 10^8 = 100'000'000 \end{aligned}$$
(1 Punkt)

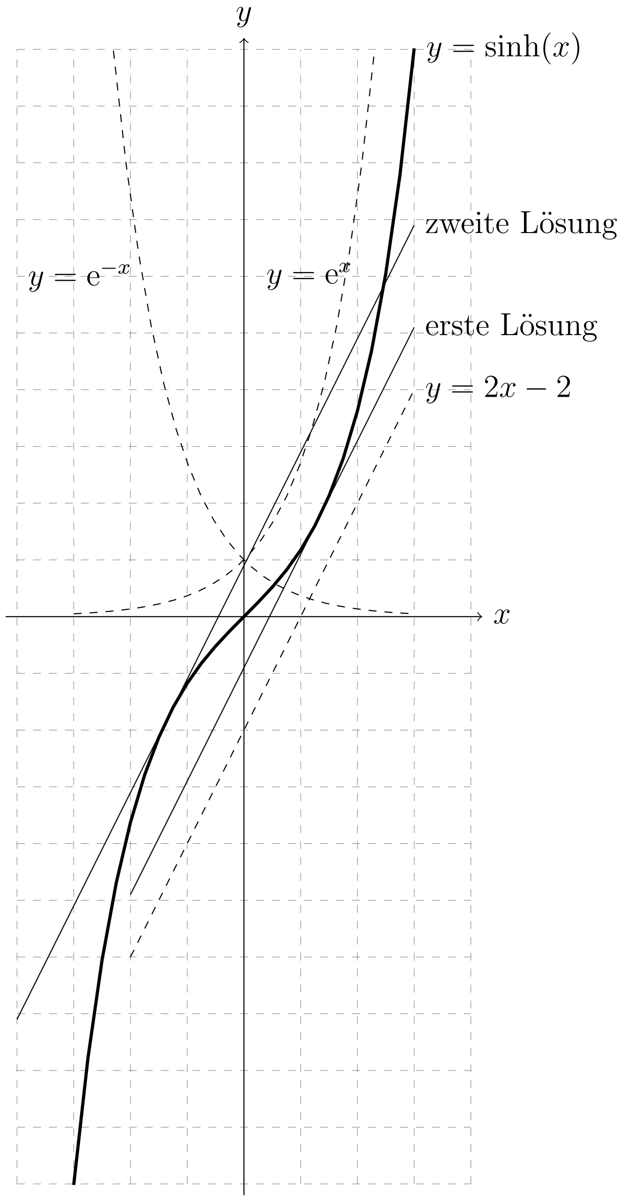
Das Resultat der linearisierten Fuktion $g(x)$ liegt weit neben dem richtigen Wert. Trotzdem wird häufig in den Naturwissenschaften und den Ingenieurwissenschaften mit linearisierten Funktionen gerechnet.
Rückschluss:
Wenn in der Umgebung einer linearisierten Funktion gerechnet wird, dann darf die Funktion um diese Stelle keine starken Krümmungen haben. (1 Punkt)

Aufgabe 6 (3 Punkte)
Mit $f(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ folgt: $f'(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$.

Aus $f'(x) = 2$ folgt die Gleichung $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = 2$. Diese kann mit der Substitution $z = e^x$ auf die quadratische Gleichung $z^2 - 4z + 1 = 0$ geführt werden.
Wir erhalten zwei Lösungen $z_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$
Aus $e^x = 2 + \sqrt{3} \approx 3.732$ folgt: $x_1 \approx 1.32$
Aus $e^x = 2 - \sqrt{3} \approx 0.268$ folgt: $x_2 \approx -1.32$ (1 Punkt)

Aus $f'(x) = \frac{1}{2}$ folgt die Gleichung $\frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) = \frac{1}{2}$. Mit der gleichen Substitution erhalten wir die quadratische Gleichung $z^2 - z + 1 = 0$. Diese Gleichung hat keine Lösung! (1 Punkt)

Grafische Darstellung. (1 Punkt)


y
$y = \sinh(x)$
zweite Lösung
$y = e^{-x}$
$y = e^{x}$
erste Lösung
$y = 2x - 2$
x