Übungsblatt 7

Die Ableitung einer Vektorfunktion, Storrer 8

Abgabe: Mittwoch, **08.11.2017**, vor der Vorlesung.

MUST

Aufgabe 1

Wir betrachten die Vektorfunktion $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -\cos(t) + 1 \\ \sin(t) \end{pmatrix}$

a) Bestimmen Sie $\dot{\vec{x}}(t) = \frac{d\vec{x}}{dt}$. Welche Bedeutung hat diese Vektorfunktion?

b) Berechnen Sie $\vec{x}(t)$ und $\dot{\vec{x}}(t)$ für $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{\pi}{4}$, $t_3 = \frac{\pi}{2}$, $t_4 = \frac{3\pi}{4}$ und $t_5 = \pi$.

c) Zeichnen Sie die Funktion $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} -\cos(t) + 1 \\ \sin(t) \end{pmatrix}$ für $0 \leq t \leq 2\pi$.

STANDARD

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Gegeben sei

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 + 3t^2 \\ 2t - 1 \\ t^3 - t \end{pmatrix} \qquad , \qquad t \geq 0$$

a) (1 Punkt) Bestimmen Sie den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}(t) = \dot{\vec{x}}(t)$ und dessen Betrag, die Schnelligkeit $v(t) = \left|\dot{\vec{x}}(t)\right|$.

b) (1 Punkt) Bestimmen Sie den Beschleunigungssvektor $\vec{a}(t) = \ddot{\vec{x}}(t)$ und dessen Betrag $a(t) = \left|\ddot{\vec{x}}(t)\right|$.

c) (2 Punkte) Wann ist die Schnelligkeit $v(t)$ am Kleinsten? Bestimmen Sie dessen Wert.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

a) Skizzieren Sie qualitativ den Verlauf von

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t(t-1) \\ t^2 \end{pmatrix}$$

für $0 \leq t \leq 2$. Gehen Sie wie folgt vor:

- (1 Punkt) Zeichen Sie die Projektion von $\vec{x}(t)$ auf die x_1x_2-Ebene (oder xy-Ebene).
- (1 Punkt) Überlegen Sie, wie sich $x_3(t)$ für $0 \leq t \leq 2$ verhält.
- (2 Punkte) Berechnen Sie $\vec{x}(0)$, $\vec{x}(1)$, $\vec{x}(2)$ und zeichnen Sie jetzt den Verlauf von $\vec{x}(t)$.

b) (1 Punkt) Bestimmen Sie den Geschwindigkeitsvektor $\dot{\vec{x}}(t) = \frac{d\vec{x}(t)}{dt}$. Berechnen Sie $\dot{\vec{x}}(0)$, $\dot{\vec{x}}(1)$ und $\dot{\vec{x}}(2)$ sowie deren Betrag.

c) (1 Punkt) Wann ist die Schnelligkeit am Grössten und wann am Kleinsten?

Aufgabe 4 (2 Punkte)

a) (1 Punkt) Bestimmen Sie für

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} 3t \\ t^2 - 2t \\ 4 - t^2 \end{pmatrix}$$

die Gleichung der Tangente im Punkt für $t = 2$.

b) (1 Punkt) Gibt es 2 Punkte im Intervall $1 \leq t \leq 3$, deren Tangentialvektoren senkrecht aufeinander stehen?

HONOURS

Aufgabe 5 (7 Punkte)
Eine ebene, geschlossene Schlinge hat die Parameterdarstellung

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t^2 - 1 \\ 3t^3 - t \end{pmatrix} \qquad -1 \leq t \leq 1$$

a) (1 Punkt) Bestimmen Sie $\dot{\vec{r}}(t)$.

b) (1 Punkt) Bestimmen Sie die Punkte, an denen $\vec{r}(t)$ die Achsen schneidet.

c) (1 Punkt) Bestimmen Sie die Punkte mit vertikalen Tangenten.

d) (1 Punkt) Bestimmen Sie die Punkte mit horizontalen Tangenten.

e) (1 Punkt) Betrachten Sie den speziellen Punkt P(0/0) und bestimmen Sie die Tangentialvektoren in diesem Punkt.

f) (1 Punkt) Bestimmen Sie $\vec{r}(-1)$, $\vec{r}(0)$ und $\vec{r}(1)$.

g) (1 Punkt) Skizzieren Sie die Kurve. Berücksichtigen Sie die berechneten Punkte, speziell den Punkt $P(0/0)$.