Übungsblatt 5 - Lösung

Aufgabe 1

a) Definition der Stetigkeit:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \uparrow x_0} f(x) = \lim_{x \downarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

b) Eine differenzierbare Funktion ist immer stetig!

c)

(1) $f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$

(2) $f(x) = 5 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0$

(3) $f(x) = x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 1$

(4) $f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 2x$

(5) $f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^x$

(6) $f(x) = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{1}{x}$

(7) $f(x) = \sin(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \cos(x)$

(8) $f(x) = \cos(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = -\sin(x)$

Aufgabe 2 (3 Punkte) Die Funktion $f(x)$ ist differenzierbar in x_0, wenn die Bedingungen

- links- und rechtsseitige Funktionswerte sind gleich:

$$\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = \lim_{x \downarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \Rightarrow \text{ f ist stetig in } x_0$$

- links- und rechtsseitige Ableitungen sind gleich:

$$\lim_{x \uparrow x_0} f'(x) = \lim_{x \downarrow x_0} f'(x) \quad \Rightarrow \text{ f ist differenzierbar in } x_0$$

gelten. Siehe auch Storrer Seite 48 und 59.

a) (1 Punkt)

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - a & , \quad x \leq x_0 \\ -2x & , \quad x > x_0 \end{cases} \quad ; \; x_0 = 1$$

Aus den beiden Bedingungen erhält man:

$$\left| \begin{array}{ccccccc} 1 & - & a & = & -1 & + & b \\ 2 & - & a & = & -2 & & \end{array} \right|$$

Daraus folgt: $a = 4$ und $b = -2$.

b) (1 Punkt)

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & , \quad x \leq x_0 \\ a^2 x^{a-1} + b & , \quad x > x_0 \end{cases} \quad ; \ x_0 = 1$$

Aus den beiden Bedingungen erhält man:

$$\left| \begin{array}{ccccc} \frac{3}{4} & = & a & + & b \\ \frac{1}{2} & = & a^2 & + & b \end{array} \right|$$

Daraus folgt: $a = \frac{1}{2}$ und $b = \frac{1}{4}$

c) (1 Punkt)

$$f'((x) = \begin{cases} ae^{ax} & , \quad x \leq x_0 \\ -\frac{b}{(x+2)^2} & , \quad x > x_0 \end{cases} \quad ; \ x_0 = 0$$

Aus den beiden Bedingungen erhält man:

$$\left| \begin{array}{cccc} 1 & = & & \frac{b}{2} \\ a & = & - & \frac{b}{4} \end{array} \right|$$

Daraus folgt: $a = -\frac{1}{2}$ und $b = 2$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

a) (1 Punkt) Das Resultat der ersten Zeile genügt bereits für die volle Punktezahl.

$$\begin{aligned} f'(x) =& \Big[\ln(x) \cdot x^n \Big]' = \frac{1}{x} \cdot x^n + \ln(x) \cdot n x^{n-1} = x^{n-1} + n \cdot \ln(x) \cdot x^{n-1} \\ =& x^{n-1} \Big[1 + n \cdot \ln(x) \Big] = x^{n-1} \Big[\ln(e) + \ln(x^n) \Big] = x^{n-1} \cdot \ln(e \cdot x^n) \end{aligned}$$

b) (1 Punkt) Das Resultat der zweiten Zeile genügt bereits für die volle Punktezahl, auch mit negativen Exponent

$$\begin{aligned} f'(x) =& \frac{d}{dx} \left[\sqrt[4]{\frac{x^2-1}{x}} \right] = \frac{d}{dx} \left[\frac{x^2-1}{x} \right]^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{x^2-1}{x} \right]^{-\frac{3}{4}} \cdot \frac{2x \cdot x - (x^2-1) \cdot 1}{x^2} \\ =& \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{x}{x^2-1} \right]^{\frac{3}{4}} \cdot \frac{2x^2 - x^2 + 1}{x^2} = \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{x}{x^2-1} \right]^{\frac{3}{4}} \cdot \frac{x^2+1}{x^2} \\ =& \frac{1}{4} \cdot \sqrt[4]{\left[\frac{x}{x^2-1} \right]^3} \cdot \frac{x^2+1}{x^2} \end{aligned}$$

c) (1 Punkt)

$$\begin{aligned}
f'(x) =& \frac{2\cos(x)(-\sin(x)) \cdot (e^{-x} - e^{x}) - \cos^2(x) \cdot (-e^{-x} - e^{x}))}{(e^{-x} - e^{x})^2} \\
=& \frac{-2\sin(x)\cos(x) \cdot (e^{-x} - e^{x}) + \cos^2(x) \cdot (e^{-x} + e^{x}))}{(e^{-x} - e^{x})^2} \\
=& \frac{-\sin(2x) \cdot (e^{-x} - e^{x}) + \cos^2(x) \cdot (e^{-x} + e^{x}))}{(e^{-x} - e^{x})^2}
\end{aligned}$$

d) (1 Punkt)

$$\begin{aligned}
f'(x) =& [\cos(\cos(\cos(x)))]' = -\sin(\cos(\cos(x))) \cdot [\cos(\cos(x))]' \\
=& -\sin(\cos(\cos(x))) \cdot (-\sin(\cos(x))) \cdot [\cos(x)]' \\
=& \sin(\cos(\cos(x))) \cdot \sin(\cos(x)) \cdot (-\sin(x)) \\
=& -\sin(\cos(\cos(x))) \cdot \sin(\cos(x)) \cdot \sin(x)
\end{aligned}$$

Aufgabe 4 (3 Punkte)

a) (2 Punkte) Die Funktion $f(x)$ kann mit der Kettenregel abgeleitet werden. Die äussere Funktion hat die Form $\sqrt{x}$ deren Ableitung $\frac{1}{2\cdot\sqrt{x}}$ ist. (1 Punkt)

$$\begin{aligned}
f'(x) =& \left[\sqrt{\sqrt{x^2-a^2}-a^2}\right]' = \frac{1}{2\cdot\sqrt{\sqrt{x^2-a^2}-a^2}} \cdot \left[\sqrt{x^2-a^2}-a^2\right]' \\
=& \frac{1}{2\cdot\sqrt{\sqrt{x^2-a^2}-a^2}} \cdot \frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2-a^2}} \cdot \left[x^2-a^2\right]' \\
=& \frac{1}{2\cdot\sqrt{\sqrt{x^2-a^2}-a^2}} \cdot \frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2-a^2}} \cdot 2x \\
=& \frac{x}{2\cdot\sqrt{\sqrt{x^2-a^2}-a^2}\cdot\sqrt{x^2-a^2}} \qquad \text{(1 Punkt)}
\end{aligned}$$

b) (1 Punkt Die Funktion $f(x)$ kann mit der Kettenregel abgeleitet werden. Die äussere Funktion $\tan x$ hat die Ableitung $1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2(x)}$.

$$\begin{aligned}
f'(x) =& \left[\tan(\sqrt{x^2-1})\right]' = \left[1+\tan^2(\sqrt{x^2-1})\right] \cdot \left[\sqrt{x^2-1}\right]' \\
=& \left[1+\tan^2(\sqrt{x^2-1})\right] \cdot \frac{1}{2\cdot\sqrt{x^2-1}} \cdot 2x = \left[1+\tan^2(\sqrt{x^2-1})\right] \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}
\end{aligned}$$

Aufgabe 5 (3 Punkte)
Wir setzen $h(x) = \sqrt{1-x^2}$. Damit wird die Lesbarkeit für die Kettenregel vereinfacht.
Mit $f(x) = \arcsin(h(x))$ folgt für die Ableitung $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-h^2(x)}} \cdot h'(x)$. (1 Punkt)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left[\arcsin(\sqrt{1-x^2})\right]' = \left[\arcsin(h(x))\right]' \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-h^2(x)}} \cdot \left[h(x)\right]' = \frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}} \cdot \left[\sqrt{1-x^2}\right]' \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{1-x^2}} \cdot (-2x) && \text{(1 Punkt)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-1+x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (-x) = \frac{1}{\sqrt{x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot (-x) \\
&= -\frac{x}{|x|} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} && \text{(1 Punkt)}
\end{aligned}$$