Übungsblatt 4 - Lösung

Aufgabe 1

x	x_0	$\Delta x = x - x_0$	$f(x) = x^3$	$f(x_0) = x_0^3$	$\Delta f = f(x) - f(x_0)$	$\frac{\Delta f}{\Delta x}$
2	1	1	8	1	7	7
1.5	1	0.5	3.375	1	2.375	4.75
1.3	1	0.3	2.197	1	1.197	3.99
1.1	1	0.1	1.331	1	0.331	3.31
1.05	1	0.05	1.157625	1	0.157625	3.1525
1.01	1	0.01	1.030301	1	0.030301	3.0301
1.001	1	0.001	1.003003001	1	0.003003001	3.003001

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) (2 Punkte) Die Polynomdivision liefert:

$$
\begin{array}{l}
(x^4 - x_0^4) : (x - x_0) = x^3 + x^2 x_0 + x x_0^2 + x_0^3 \qquad \text{(1 Punkt)} \\
\underline{-(x^4 - x^3 x_0)} \\
\quad x^3 x_0 - x_0^4 \\
\quad \underline{-(x^3 x_0 - x^2 x_0^2)} \\
\qquad x^2 x_0^2 - x_0^4 \\
\qquad \underline{-(x^2 x_0^2 - x x_0^3)} \\
\qquad\quad x x_0^3 - x_0^4 \\
\qquad\quad \underline{-(x x_0^3 - x_0^4)} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Somit: $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^4 - x_0^4}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} (x^3 + x^2 x_0 + x x_0^2 + x_0^3) = 4x_0^3$ (1 Punkt)

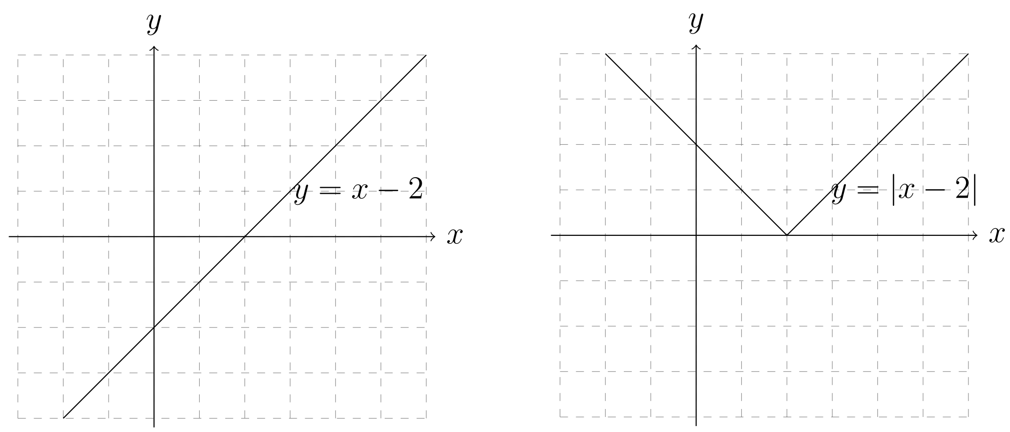
b) (2 Punkte)

$$
f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{x_0})^2} = \lim_{x \to x_0} \frac{\cancel{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}}{(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})\cancel{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})}}
$$

$$
= \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{\sqrt{x_0} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}
$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

a) (1 Punkt) Wir zeichnen den Graphen der Funktion $y = f(x)$ auf, indem wir zuerst den Graphen der Funktion $y = g(x) = x - 2$ aufzeichnen!



Wie aus der Zeichnung ersichtlich ist hat der Graph der Funktion $f(x)$ verschiedene Steigungen. Für $x < 2$ beträgt diese -1!

b) (1 Punkt)

$$f(x) = \begin{cases} x - 2, & x > 2 \\ 0, & x = 2 \\ -x + 2, & x < 2 \end{cases}$$

c) (2 Punkte) Wir erhalten für die beiden Bereiche $x < 2$ und $x > 2$ folgende Differentialquotienten:

$$x < 2 \text{ und } x_0 < 2 \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(-x + 2) - (-x_0 + 2)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{-x + 2 + x_0 - 2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{-x + x_0}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{-(x - x_0)}{x - x_0} = -1$$

$$x > 2 \text{ und } x_0 > 2 \quad \Rightarrow \quad f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - 2) - (x_0 - 2)}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{x - 2 - x_0 + 2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

Im Punkt 2 kann kein Differentialquotient gebildet werden. Die Ableitung existiert nicht in diesem Punkt!

Aufgabe 4 (5 Punkte)
Wir machen hier der Einfachheit halber einen kleinen Notationsmissbrauch: wir schreiben in der Musterlösung bei der Überprüfung der Differenzierbarkeit $f'(x) = ...$ und dann kommt eine geschweifte Klammer (Fallunterscheidung), wobei am Übergang die Differenzierbarkeit überprüft werden muss. Wenn man $f'(x)$ schreibt, dann existiert streng genommen $f'(x)$ ja schon (sonst dürfte man es nicht schreiben) und damit ist die Funktion bei x_0 automatisch differenzierbar. Wir machen hier aber ab, dass damit gemeint ist, dass die Funktion innerhalb der offenen Teilintervalle differenzierbar ist und dort die angegebenen Ableitungen hat.
Bei den in dieser Vorlesung behandelten Funktionen kann man mit dem angegebenen, anschaulichen Kriterium die Differenzierbarkeit überprüfen (Limes der Ableitung von links und rechts muss gleich sein).

a) (1 Punkt)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{x} = x^2, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ \frac{x^3}{-x} = -x^2, & x < 0 \end{cases} \qquad f'(x) = \begin{cases} 2x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -2x, & x < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \uparrow 0} f(x) = \lim_{x \downarrow 0} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \uparrow 0} f'(x) = \lim_{x \downarrow 0} f'(x) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ ist stetig} \qquad \Rightarrow f(x) \text{ ist differenzierbar}$$

b) (1 Punkt)

$$f(x) = |e^{3x-1}(x^2 - 4x + 4)| = |e^{3x-1}(x-2)^2| = e^{3x-1}(x-2)^2$$

Die Funktionen e^{3x-1} und $(x-2)^2$ sind überall stetig und differenzierbar. Daher ist auch die Funktion $f(x)$ überall stetig und differenzierbar.

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3e^{3x-1}(x-2)^2 + 2e^{3x-1}(x-2) = \big(3(x-2)+2\big)e^{3x-1}(x-2) \\ &= e^{3x-1}(x-2)(3x-4) \quad \text{und somit} \quad f'(3) = 5e^8 \end{aligned}$$

c) (1 Punkt)

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \leq 0 \\ e^x, & x > 0 \end{cases}, \ x_0 = 0 \qquad f'(x) = \begin{cases} -e^{-x}, & x < 0 \\ e^x, & x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \uparrow 0} f(x) = \lim_{x \downarrow 0} f(x) = 1 \qquad \lim_{x \uparrow 0} f'(x) = -1 \neq \lim_{x \downarrow 0} f'(x) = 1$$

$$\Rightarrow f(x) \text{ ist stetig} \qquad \Rightarrow f(x) \text{ ist nicht differenzierbar}$$

d) (1 Punkt)

$$f(x) = \begin{cases} \sin(x), & x \leq 0 \\ x^3 + 2x^2 + x, & x > 0 \end{cases} \quad , x_0 = 0 \qquad f'(x) = \begin{cases} \cos(x), & x \leq 0 \\ 3x^2 + 4x + 1, & x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \uparrow 0} f(x) = \lim_{x \downarrow 0} f(x) = 0 \qquad \lim_{x \uparrow 0} f'(x) = \lim_{x \downarrow 0} f'(x) = 1$$

$\Rightarrow f(x)$ ist stetig $\qquad \Rightarrow f(x)$ ist differenzierbar

e) (1 Punkt)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < x < 1 \\ 1 - x, & x \geq 1 \end{cases} \quad , x_0 = 1$$

$$\lim_{x \uparrow 1} f(x) = 1 \neq \lim_{x \downarrow 1} f(x) = 0$$

$\Rightarrow f(x)$ ist nicht stetig $\qquad \Rightarrow f(x)$ist nicht differenzierbar

Aufgabe 5 (3 Punkte)

a) (1 Punkt) Wir leiten die Ableitung her, indem wir den Differenzenquotienten bilden und dann den Grenzwert $x \to x_0$ bilden.

b) (1 Punkt)

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{x}{1-x} - \frac{x_0}{1-x_0}}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{x(1-x_0) - x_0(1-x)}{(1-x)(1-x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{x - xx_0 - x_0 + xx_0}{(1-x)(1-x_0)}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{\frac{x - x_0}{(1-x)(1-x_0)}}{x - x_0}$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{\cancel{x - x_0}}{(1-x)(1-x_0)\cancel{(x - x_0)}} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{(1-x)(1-x_0)}$$

c) (1 Punkt)

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{(1-x)(1-x_0)} = \frac{1}{(1-x_0)(1-x_0)} = \frac{1}{(1-x_0)^2}$$