

# Übungsblatt 1 - Lösung

---

## Aufgabe 1 (5 Punkte)

a) (1 Punkt)

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 8}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{-2} = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{-2} = \frac{-2 \pm 6}{-2}$$

$$\Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 4$$

b) (1 Punkt) Der Scheitelpunkt der Parabel liegt (aus Symmetriegründen) genau zwischen den Nullstellen.  $x_S = \frac{-2+4}{2} = 1$  und  $y_S = 9$ .

c) (2 Punkte) Wir machen den Ansatz  $y = mx + b$ . Damit haben wir mit  $m$  und  $b$  zwei Unbekannte und wir benötigen zwei Gleichungen.

Der Punkt  $(2/8)$  liegt auf der Geraden und der Parabel.

Daraus folgt:  $8 = 2m + b$ .

(1 Punkt)

Ferner berühren sich die Gerade und die Parabel im Punkt  $(2/8)$ , somit darf die Gleichung  $-x^2 + 2x + 8 = mx + b$  nur eine Lösung haben. Umgeformt auf  $x^2 + (m - 2)x + (b - 8) = 0$  und aufgelöst nach  $x$  ergibt dies:

$$x_{1,2} = \frac{-(m - 2) \pm \sqrt{(m - 2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (b - 8)}}{2 \cdot 1}$$

Es gibt nur dann eine Lösung, falls die Wurzel verschwindet. Dies ist die zweite Gleichung. Setzt man aber direkt

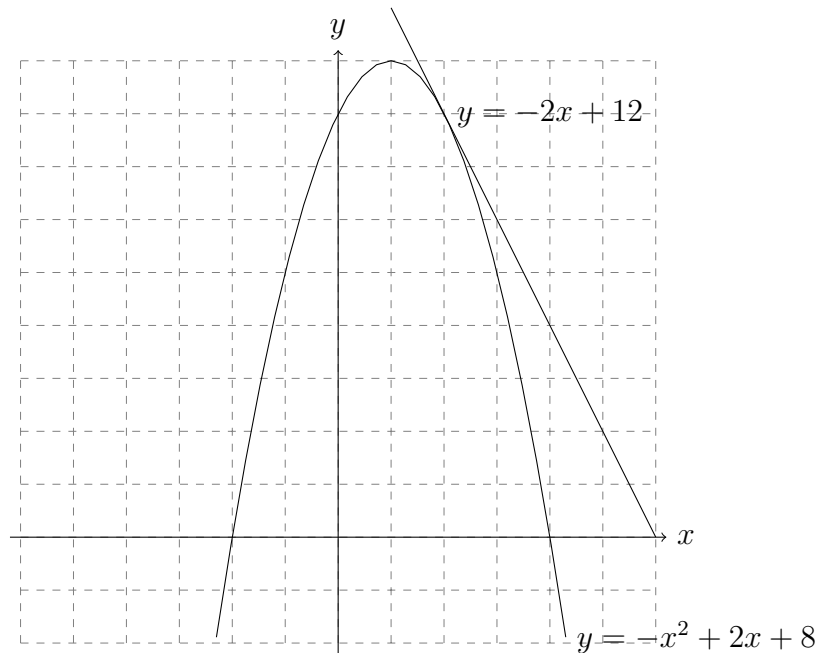
$$x_1 = x_2 = \frac{-(m - 2)}{2} = 2 \quad \text{so erhält man sofort} \quad m = -2$$

Aus  $8 = 2m + b$  folgt  $b = 12$ .

Die Tangentengleichung lautet  $y = -2x + 12$ .

(1 Punkt)

d) (1 Punkt) Graphische Darstellung.



**Aufgabe 2** (6 Punkte)

(a) (2 Punkte) Die Gleichung hat den Definitionsbereich  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\begin{array}{r|l}
 3x^2 + 6x = \frac{4}{3} + \frac{8}{3x} & \\
 3x(x+2) = \frac{4}{3}\left(1 + \frac{2}{x}\right) & \cdot (3x) \\
 9x^2(x+2) = 4(x+2) & -4(x+2) \\
 9x^2(x+2) - 4(x+2) = 0 & \\
 (x+2) \cdot (9x^2 - 4) = 0 & 
 \end{array}$$

(1 Punkt)

Man erhält die Lösungen  $x_1 = -2$  und  $x_{2,3} = \pm \frac{2}{3}$ .

Somit ist  $L = \{-2, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\}$ .

(1 Punkt)

(b) (2 Punkte) Man substituiere  $5^{2x} := z$ , dann erhält man

$$z^2 - 7z + 10 = 0$$

Durch Faktorisieren  $(z-2)(z-5) = 0$  kommt man auf die Lösungen  $z_1 = 2$  und  $z_2 = 5$ .

(1 Punkt)

Aus  $z_1 = 2$  ergibt sich:  $5^{2x} = 2 \Rightarrow x_1 = \frac{\log(2)}{2 \cdot \log(5)} \approx 0.215$

Aus  $z_2 = 5$  ergibt sich:  $5^{2x} = 5 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{2}$

(1 Punkt)

- (c) (2 Punkte) Durch Probieren erhält man die erste Lösung  $x_1 = 1$  dieser Gleichung. Die Polynomdivision liefert weiter

$$(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) : (x - 1) = x^2 - x - 6 \quad (1 \text{ Punkt})$$

$$\begin{array}{r} -(x^3 - x^2) \\ \hline -x^2 - 5x + 6 \\ -(-x^2 + x) \\ \hline -6x + 6 \\ -(-6x + 6) \\ \hline 0 \end{array}$$

Ferner kann  $x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$  zerlegt werden. Somit kann nun die Gleichung  $(x - 1)(x + 2)(x - 3) = 0$  einfach aufgelöst werden.

Daraus folgt  $L = \{1, -2, 3\}$ . (1 Punkt)

### Aufgabe 3 (4 Punkte)

- (a) (2 Punkte)

$$3x + 2y - z = 3 \quad (1)$$

$$2x - y + z = 4 \quad (2)$$

$$4x + 2y - 3z = -4 \quad (3)$$

Wir eliminieren  $z$  mittels (1) & (2) und (1) & (3)

$$\begin{array}{llll} 3x + 2y - z = 3 & (1) & 9x + 6y - 3z = 9 & (1) \cdot 3 \\ 2x - y + z = 4 & (2) & 4x + 2y - 3z = -4 & (3) \\ \Rightarrow 5x + y = 7 & (4) & \Rightarrow 5x + 4y = 13 & (5) \end{array} \quad (1 \text{ Punkt})$$

Jetzt  $x$  und  $y$  bestimmen mittels (4) & (5)

$$5x + y = 7 \quad (4)$$

$$5x + 4y = 13 \quad (5)$$

$$\Rightarrow 3y = 6 \quad \Rightarrow y = 2$$

Aus (4) folgt sofort  $x = 1$  und aus (1) folgt auch sofort  $z = 4$ . (1 Punkt)

- (b) (2 Punkte) Aus dem Gleichungssystem

$$6x + y - 2z = 0 \quad (1)$$

$$2x - y + z = 4 \quad (2)$$

$$4x + 2y - 3z = -4 \quad (3)$$

kann man die Variable  $y$  eliminieren.

$$(1) + (2) \Rightarrow 8x - z = 4 \quad (4)$$

$$(2) \cdot 2 + (3) \Rightarrow 8x - z = 4 \quad (5)$$

(1 Punkt)

Aus dieser Darstellung ist sofort ersichtlich, dass Gleichung (4) und (5) identisch sind. Setzen wir also  $x = t$  in (4) ein, so erhalten wir  $z = 8t - 4$ .  $y$  bestimmt man aus der Gleichung (1). Man erhält  $y = 10t - 8$ .

Wir erhalten als Lösung eine Geradengleichung

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} t \\ 10t - 8 \\ 8t - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix}$$

(1 Punkt)

#### Aufgabe 4 (6.5 Punkte)

a) Pro Teilaufgabe  $\frac{1}{2}$  Punkt

$$1) 2 \ln(a) - \ln(3c) = \ln(a^2) - \ln(3c) = \ln\left(\frac{a^2}{3c}\right)$$

$$2) 3 \ln(y) + \frac{1}{3} \ln(y) = \frac{10}{3} \ln(y) = \ln\left(y^{\frac{10}{3}}\right) = \ln\left(\sqrt[3]{y^{10}}\right)$$

$$3) 4 \ln(m) - \frac{1}{6} \ln(n) = \ln(m^4) - \ln\left(n^{\frac{1}{6}}\right) = \ln(m^4) - \ln(\sqrt[6]{n}) = \ln\left(\frac{m^4}{\sqrt[6]{n}}\right)$$

b) (1 Punkt)

$$e^{5a} \cdot e^{x^3} \cdot (e^{1-t})^t = e^{5a} \cdot e^{x^3} \cdot e^{(1-t) \cdot t} = e^{5a + x^3 + (1-t) \cdot t}$$

c) Pro Teilaufgabe  $\frac{1}{2}$  Punkt

$$1) e^{-\ln(2x)} = (e^{\ln(2x)})^{-1} = (2x)^{-1} = \frac{1}{2x}$$

$$2) e^{3 \ln(w)} = (e^{\ln(w)})^3 = w^3$$

$$3) e^{\frac{1}{2} \ln(2y)} = (e^{\ln(2y)})^{\frac{1}{2}} = (2y)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2y}$$

$$4) e^{-\frac{1}{3} \ln(d)} = (e^{\ln(d)})^{-\frac{1}{3}} = (d)^{-\frac{1}{3}} = (d^{-1})^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{d}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{(d)^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{d}}$$

d) Teilaufgabe 1) und 2) je  $\frac{1}{4}$  Punkt, Teilaufgabe 3)  $\frac{1}{2}$  Punkt

1)  $\ln(a^9 b) = \ln(a^9) + \ln(b) = 9 \ln(a) + \ln(b)$

2)  $\ln(e^3 + 5) \Rightarrow$  lässt sich nicht vereinfachen, da  $\ln(a + b) \neq \ln(a) + \ln(b)$

3)  $\ln\left(\frac{e^{-x}}{b}\right) = \ln(e^{-x}) - \ln(b) = -x \ln(e) - \ln(b) = -x - \ln(b)$

e) (1 Punkt)

$$\begin{array}{r|l} 2^x - 2^{x-1} = 2 & \cdot 2 \\ 2 \cdot 2^x - 2^x = 4 & \\ 2^x = 4 & \\ x = 2 & \end{array}$$