

Dieses Skript ist ein Auszug mit Lücken aus "Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften I" von Hans Heiner Storrer, Birkhäuser Skripten. Als StudentIn sollten Sie das Buch auch kaufen und im Verlauf der Vorlesung MAT 182 vollständig durcharbeiten. Für Ihre eigenen Bedürfnisse in dieser Vorlesung MAT 182 dürfen Sie dieses PDF-Dokument abspeichern und beliebig ändern. Für eine weitergehende Verwendung ausserhalb der Vorlesung MAT 182 kontaktiere man bitte vorgängig den Dozenten Christoph Luchsinger, Universität Zürich. Das Copyright ist bei Birkhäuser!

19. POTENZREIHEN

(19.2) Folgen (sequences)

$$\frac{1}{n}$$

$$\frac{2n^3+n^2+5n}{n^3}$$

$$1 + \frac{(-1)^n}{n}$$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\frac{2000n^3}{1.0001^n}$$

Die Rangliste:

$$(-1)^n$$

$$n(-1)^n$$

Jetzt die mathematisch exakten Definitionen:

Es sei (a_n) eine Folge. Die Zahl $a \in \mathbb{R}$ heisst *Grenzwert* (oder *Limes*) dieser Folge, wenn die nachstehende Bedingung erfüllt ist: Zu jeder (noch so kleinen) Zahl $\varepsilon > 0$ gibt es eine natürliche Zahl N (welche von ε abhängt), derart, dass gilt:

$$a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \quad \text{für alle } n > N .$$

Eine Folge (c_n) konvergiert uneigentlich gegen ∞ (oder divergiert gegen ∞), wenn gilt: Zu jeder (noch so grossen) Zahl C gibt es eine natürliche Zahl N mit

$$c_n > C \quad \text{für alle } n > N .$$

In Worten also: Die Folgenglieder werden schliesslich grösser als jede beliebige Zahl. Man schreibt dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \infty \quad \text{oder} \quad c_n \rightarrow \infty \quad \text{für } n \rightarrow \infty .$$

Der Ausdruck $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -\infty$ ist entsprechend definiert.

Bemerkungen:

(19.3) Reihen (Series)

Nahe verwandt mit dem Begriff der Folge ist jener der Reihe. Sie kennen die geometrische Reihe. Ein Beispiel dazu ist

$$1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \dots .$$

Für die Konvergenz dieser Reihe:

Man sagt, die Summe dieser Reihe sei gleich 2. Damit meint man folgendes: Wir berechnen der Reihe nach

$$\begin{aligned} s_0 &= 1 && = 1 \\ s_1 &= 1 + \frac{1}{2} && = 1.5 \\ s_2 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 && = 1.75 \\ s_3 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 && = 1.875 \\ s_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 && = 1.9375, \\ &\text{usw.} \end{aligned}$$

Die so konstruierte Folge (s_n) strebt gegen 2. Man schreibt dies gewöhnlich so:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots = 2 .$$

Man kann das obige Beispiel als Modell für die allgemeine Situation nehmen. Es sei

$$a_0, a_1, a_2, \dots$$

eine Folge reeller Zahlen. Wir konstruieren daraus eine neue Folge

$$s_0, s_1, s_2, \dots$$

die sogenannte *Teilsummen-* oder *Partialsommenfolge* von (a_k) durch die Bildungsvorschrift

$$\begin{aligned} s_0 &= a_0 \\ s_1 &= a_0 + a_1 \\ s_2 &= a_0 + a_1 + a_2 \\ &\vdots \\ s_n &= a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{k=0}^n a_k . \\ &\vdots \end{aligned}$$

Wenn nun die Folge (s_n) konvergiert und den Grenzwert $s \in \mathbb{R}$ hat, so sagt man, *die Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ *konvergiere* (andernfalls *divergiert* die Reihe), und s heisst dann die *Summe* der Reihe:

$$s = \sum_{k=0}^{\infty} a_k .$$

Eine Reihe ist also nichts anderes als eine Folge, die unter einem speziellen Blickwinkel betrachtet wird.

Beachten Sie, dass das Zeichen

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$$

nicht eine unendliche Summe von reellen Zahlen bezeichnet (die gar nicht zu definieren wäre), sondern den Limes einer gewissen Folge! Man darf deshalb nicht unbesehen die für endliche Summen bekannten Rechenregeln auf Reihen übertragen. Die folgenden Formeln haben aber trotzdem Gültigkeit, wie man zeigen kann:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k + \sum_{k=0}^{\infty} b_k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} ca_k = c \sum_{k=0}^{\infty} a_k, \quad (c \in \mathbb{R}),$$

sofern die Reihen auf den rechten Seiten konvergieren.

| |
|-----------------------------|
| (19.4) Beispiele von Reihen |
|-----------------------------|

a) Die geometrische Reihe

b) Die harmonische Reihe

(19.5) Potenzreihen

Warum machen wir das?

1. Die schöne Mathematik; es gilt unerwartet unter anderem:

2. Funktionen wie $\sin(x)$, $\cos(x)$, e^x oder gar der \ln sind schwierig Ding. Polynome sind einfach, sowohl für das Kopfrechnen wie auch die höhere Mathematik. Die praktische Seite der Potenzreihen - noch besser als die Linearisierung durch das Differential aus Kapitel 7 - finden wir im Bild Storrer Seite 295 oben.

In diesem Abschnitt beschreiten wir Neuland. Wir betrachten Reihen, deren Summanden nicht einfach Zahlen, sondern Funktionen sind. Weil es sich im hier zu besprechenden Fall bei diesen Funktionen um Potenzfunktionen (wie z.B. $x \mapsto a_2(x - x_0)^2$, siehe unten) handelt, spricht man von Potenzreihen. Nun führen wir die relevanten Begriffe ein:

Unter einer *Potenzreihe mit Zentrum* x_0 versteht man eine Reihe der Form

$$(1) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots$$

Dabei denkt man sich die a_k als fest gegebene reelle Zahlen, während man x als Variable betrachtet.

In den Anwendungen werden wir fast nur Potenzreihen mit Zentrum $x_0 = 0$ antreffen. Eine solche hat die Form

$$(2) \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

Die Theorie schreiben wir aber doch stets für den allgemeinen Fall auf.

Setzt man in einer Potenzreihe für x irgendeine Zahl ein, so erhält man eine gewöhnliche Zahlenreihe, wie sie in (19.3) besprochen wurde. Wir betrachten dazu nochmals Bild Storrer Seite 295. Bei jeder Reihe tritt sofort als Reflex die Frage nach der Konvergenz auf. Wir werden weiter unten darauf zurückkommen; es ist aber klar, dass die Antwort vom Wert von x abhängen wird. Zuerst betrachten wir jedoch zwei Beispiele:

Beispiele

1. Setzen wir in (1) $x_0 = 0$ (wir haben dann Fall (2) vor uns) und $a_k = 1$ für alle k , dann erhalten wir

2. Auch

$$1 + (x - 1) + (x - 1)^2 + (x - 1)^3 + \dots$$

ist eine geometrische Reihe, diesmal mit dem Quotienten $x - 1$. Es handelt sich hier um eine Potenzreihe mit Zentrum 1. Sie konvergiert für $|x - 1| < 1$, was gleichbedeutend mit $0 < x < 2$ ist. Ihre Summe ist für diese Werte von x gleich

$$\frac{1}{1 - (x - 1)} = \frac{1}{2 - x} . \quad \square$$

Nun kehren wir zur allgemeinen Situation zurück und betrachten die Potenzreihe (1). Wie schon erwähnt, muss man wie bei jeder Reihe als erstes nach der Konvergenz fragen.

Da für eine bestimmte Potenzreihe die a_k fest sind, hängt die Konvergenz bloss von x ab: Für gewisse x (z.B. sicher für $x = x_0$, denn hier sind alle Summanden ausser eventuell a_0 gleich Null) wird die Potenzreihe konvergieren; daneben kann es auch x geben, für welche sie divergiert.

Der *Konvergenzbereich* D einer Potenzreihe ist die Menge aller $x \in \mathbb{R}$, für welche die Reihe konvergiert. Dieses D hängt selbstverständlich von der betrachteten Potenzreihe, also von den Koeffizienten a_k ab. Für jedes x aus D ist die Summe der Reihe eine reelle Zahl. Somit wird durch

$$p : D \rightarrow \mathbb{R} , \quad x \mapsto p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

eine Funktion p definiert. Diese *Potenzreihenfunktion* ordnet jedem x , für welches die Summe der Potenzreihe überhaupt definiert ist, diese Summe als Funktionswert zu.

Betrachten wir in diesem Zusammenhang nochmals die beiden obigen Beispiele. Im Beispiel 1. ist $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\} = (-1, 1)$ und für $x \in D$ ist

$$p(x) = \frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k .$$

Im Beispiel 2. ist $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 2\} = (0, 2)$ und für $x \in D$ gilt

$$p(x) = \frac{1}{2-x} = 1 + (x-1) + (x-1)^2 + (x-1)^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (x-1)^k .$$

Wir kommen nun nochmals auf die Potenzreihenfunktionen im allgemeinen zurück. Die Beziehung

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k$$

bedeutet, dass $p(x)$ der Limes der Teilsummen s_n von

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n + \dots$$

ist. Dabei ist die n -te Teilsumme

$$s_n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n ,$$

konkret etwa im Beispiel 2.

$$s_n = 1 + (x-1) + \dots + (x-1)^n ,$$

einfach ein Polynom. Somit ist eine Potenzreihenfunktion ein Grenzwert von Polynomfunktionen, die wir nun mit $p_n(x)$ statt mit s_n bezeichnen wollen. Wegen $p_n(x) \rightarrow p(x)$ kann $p(x)$ mit beliebiger Genauigkeit angenähert werden, indem man das Polynom $p_n(x)$ für ein genügend grosses n berechnet (beachten Sie, dass man $p_n(x)$ einfach dadurch erhält, dass man die Potenzreihe für $p(x)$ "abschneidet"). Damit können die Werte von Potenzreihenfunktionen mit beliebiger Genauigkeit bestimmt werden.

Nun sehen wir uns noch einige weitere konkrete Beispiele an. Wir gehen von der geometrischen Reihe aus. Wie wir wissen, ist

$$(3) \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \quad \text{für } |x| < 1 .$$

Wir können diese Formel auch dahingehend interpretieren, dass wir sagen, wir hätten eine Darstellung der Funktion $\frac{1}{1-x}$ als Potenzreihe gefunden. Man sagt auch, man habe diese Funktion *in eine Potenzreihe entwickelt*.

Es wird unser Ziel sein, einige der wichtigsten Funktionen (wie e^x , $\sin x$ usw.) in Potenzreihen zu entwickeln. In (19.8) werden wir sehen, dass gilt

$$(4) \quad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R} .$$

Rechnen wir mal ein bisschen herum:

(19.6) Rechnen mit Potenzreihen - was darf man alles machen:

Wir betrachten eine Potenzreihe

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

mit Konvergenzbereich D .

- a) Potenzreihen mit gleichem Zentrum x_0 dürfen gliedweise addiert und subtrahiert werden: Ist

$$q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k$$

eine weitere Potenzreihe, dann gilt

$$p(x) + q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (a_k + b_k) (x - x_0)^k ,$$

und zwar für alle x , für welche sowohl $p(x)$ als auch $q(x)$ konvergiert. Eine analoge Formel gilt für die Differenz.

- b) Potenzreihen dürfen gliedweise mit einer Konstanten multipliziert werden: Für jede reelle Zahl c und alle $x \in D$ ist

$$cp(x) = \sum_{k=0}^{\infty} ca_k (x - x_0)^k .$$

Die Formeln a) und b) folgen aus den allgemeinen Regeln für Reihen (Schluss von (19.3)).

Beispiel

Wichtig für die Infinitesimalrechnung sind die nächsten beiden Regeln:

c) Eine Potenzreihe darf (in D) gliedweise abgeleitet werden: Aus

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots$$

folgt

$$p'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + 4a_4(x - x_0)^3 + \dots$$

d) Eine Potenzreihe darf (in D) gliedweise integriert werden (die Integrationsgrenzen a, b müssen in D liegen): Aus

$$p(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots$$

folgt

$$\begin{aligned} \int_a^b p(x) dx &= \int_a^b a_0 dx + \int_a^b a_1(x - x_0) dx + \int_a^b a_2(x - x_0)^2 dx + \dots \\ &= a_0 x \Big|_a^b + \frac{1}{2} a_1 (x - x_0)^2 \Big|_a^b + \frac{1}{3} a_2 (x - x_0)^3 \Big|_a^b + \dots \end{aligned}$$

Beispiele

1. Als erste Anwendung differenzieren wir die Beziehung (3)

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

auf beiden Seiten und erhalten (mit Regel c)) die neue Potenzreihe

$$(8) \quad \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots \quad \text{für } |x| < 1.$$

⊠

2. Als zweites integrieren wir die Reihe (7) von 0 bis t ($t \in D = (-1, 1)$):

$$\int_0^t \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^t 1 dx - \int_0^t x^2 dx + \int_0^t x^4 dx - \int_0^t x^6 dx + \dots$$

Wir finden nach kurzer Rechnung (arctan x ist eine Stammfunktion von $1/(1+x^2)$):

$$(9) \quad \arctan t = t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \dots \quad \text{für } |t| < 1.$$

Man kann zeigen, dass diese Formel auch noch für $t = 1$ gilt, und erhält wegen $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ die überraschende Beziehung:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

⊠

3. Wir haben bereits mehrmals festgehalten, dass die Funktion $f(x) = e^{-x^2}$ keine elementare Stammfunktion hat. Insbesondere ist

$$\int_0^x e^{-t^2} dt$$

nicht in geschlossener Form durch elementare Funktionen darstellbar. Aber...

(19.7) Taylorreihen

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, eine gegebene Funktion $f(x)$ (z.B. e^x oder $\sin x$) in eine Potenzreihe zu entwickeln. Dazu gehen wir so vor, dass wir annehmen, die Funktion $f(x)$ besitze eine Potenzreihenentwicklung mit Zentrum x_0 :

$$(*) \quad f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \dots + a_k(x - x_0)^k + \dots .$$

Dies heisst also, dass die rechts stehende Potenzreihe für alle x in einer gewissen Umgebung von x_0 konvergiert und $f(x)$ als Summe hat. Unsere Aufgabe besteht nun zunächst darin, die Koeffizienten a_k zu bestimmen:

Im allgemeinen Fall ist

$$f^{(k)}(x_0) = k(k-1)(k-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot a_k = k!a_k$$

und wir haben die gesuchte Formel für a_n gefunden, nämlich

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Dabei ist wie üblich $k! = k(k-1)(k-2)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1$, (siehe (26.4.a)). Die Formel gilt auch für $k = 0$ wegen der Konventionen $0! = 1$ (26.4) und $f^{(0)}(x) = f(x)$ (4.5).

Nach diesen Rechnungen schadet es nichts, wenn wir uns nochmals genau überlegen, was wir eigentlich gemacht haben. Wir haben folgendes gezeigt: Wenn die Funktion $f(x)$ in einer Umgebung von x_0 überhaupt als Potenzreihe darstellbar ist, dann müssen die Koeffizienten durch die obige Formel gegeben sein; die Reihe hat also die Form

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x-x_0)^2 + \dots$$

Diese Potenzreihe heisst die *Taylorreihe der Funktion f mit Zentrum x_0* . Für $x_0 = 0$ spricht man manchmal auch von der *Maclaurinreihe*.

Die Frage nach dem Konvergenzbereich D bleibt vorerst offen und ist separat abzuklären, mehr (aber nicht alles) dazu im Storrer. Aufgrund der Herleitung der Formel hoffen wir natürlich, dass diese Reihe für alle $x \in D$ gegen $f(x)$ konvergiert. Zusammengefasst heisst das, dass man bei einer gegebenen Funktion $f(x)$ zwei Fragen zu prüfen hat:

- Welches ist der Konvergenzbereich D der Taylorreihe?
- Konvergiert sie dort wirklich gegen $f(x)$?

Erst wenn die zweite Frage bejaht ist, darf man schreiben

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k \quad \text{für } x \in D.$$

Die Beantwortung dieser beiden Fragen erfordert oft subtile Untersuchungen, auf die wir hier nicht eingehen können. Wir werden deshalb im nächsten Abschnitt die entsprechenden Tatsachen jeweils ohne Beweis zitieren.

(19.8) Berechnung von Taylorreihen

Wir bestimmen nun für einige wichtige Funktionen die Taylorreihen, und zwar immer mit Zentrum 0. Dazu benötigen wir alle Ableitungen dieser Funktionen an der Stelle $x_0 = 0$. **Betrachten Sie das auch als Prüfungsvorbereitung (ab jetzt gibt es keine Pflichtübungen - schliessen Sie den Storrer und üben Sie jetzt!).**

a) Exponentialfunktion $f(x) = e^x$

b) Sinusfunktion $f(x) = \sin x$

c) Cosinusfunktion $f(x) = \cos x$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(Wegen $\cos(-x) = \cos x$ kommen hier nur die geraden Potenzen vor.) Kurz formuliert:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

d) Logarithmusfunktion $f(x) = \ln(1 + x)$

Da $\ln x$ an der Stelle $x = 0$ nicht definiert ist, betrachten wir nicht $\ln x$, sondern $\ln(1 + x)$.

(19.9) Taylorpolynome

Wie wir eben gesehen haben, lassen sich die meisten für uns wichtigen Funktionen als Summe ihrer (unendlichen) Taylorreihe darstellen. Bricht man nun diese Reihe nach dem n -ten Glied ab, so erhält man auf diese Weise ein Polynom, nämlich

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \\ &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n . \end{aligned}$$

Dieses Polynom heisst das *Taylorpolynom n -ten Grades* (mit *Zentrum x_0*) der Funktion f . Beachten Sie erneut, dass x_0 eine feste Zahl ist, nur x ist variabel.

Welcher Zusammenhang besteht nun zwischen der Funktion f und ihrem n -ten Taylorpolynom $p_n(x)$? Dieses Polynom ist nichts anderes als eine Teilsumme der Taylorreihe. Somit gilt

$$p_n(x) \rightarrow f(x) \quad \text{für } n \rightarrow \infty ,$$

für alle x , für welche die Taylorreihe von f tatsächlich gegen f konvergiert (für $f(x) = e^x$ also für alle $x \in \mathbb{R}$, für $f(x) = \ln(1+x)$ für alle $x \in (-1, 1]$, vgl. (19.8)). Dies bedeutet, dass $f(x)$ um so besser durch das (leicht berechenbare!) Polynom $p_n(x)$ angenähert wird, je grösser n ist, vgl. dazu die Zahlenbeispiele weiter unten.

Weiter gilt (siehe Storrer Seite 293)

$$p_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, n .$$

In Worten: An der Stelle $x = x_0$ stimmen der Funktionswert und die Werte der ersten n Ableitungen der Funktionen p_n und f überein. Daraus folgt, dass die Approximation von f durch p_n vor allem in der Nähe von x_0 gut sein wird,

$$p_n(x) \approx f(x) \quad \text{in der Nähe von } x_0 ,$$

und zwar ist die Annäherung um so besser, je grösser n ist, wie wir oben schon gesehen haben. Geometrisch betrachtet schmiegt sich der Graph von $p_n(x)$ jenem von $f(x)$ um so besser an, je grösser n ist, vgl. Beispiel d) unten.

Wir bemerken noch, dass zur Bildung des Taylorpolynoms $p_n(x)$ nur die Existenz der ersten n Ableitungen von $f(x)$ (und nicht die Existenz der Taylorreihe) nötig ist.

Das Taylorpolynom 1. Grades ist gegeben durch

$$p_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) .$$

Dies ist nichts anderes als die beste Approximation von $f(x)$ durch eine lineare Funktion (in der Nähe von x_0), welche schon in (7.3) behandelt wurde. Ein Vergleich mit der Formel für die Taylorreihe zeigt, dass man diese lineare Approximation dadurch erhält, dass man in der Taylorreihe die Terme “von höherer Ordnung in Δx ” ($\Delta x = (x - x_0)$), d.h. die Quadrate, Kuben, ... von $(x - x_0)$ einfach weglässt.

Beispiele und Bemerkungen

Aus den in (19.8) hergeleiteten Formeln für die Taylorreihen lassen sich ohne weiteres Formeln für Taylorpolynome ablesen:

a) $f(x) = e^x$.

$$p_1(x) = 1 + x,$$

$$p_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

$$p_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} \quad \text{usw.}$$

c) Wie schon erwähnt, sind diese Taylorpolynome Approximationen von $f(x)$. Die nachstehende Tabelle enthält einige Zahlwerte zum Vergleich von f und p_3 .

| $f(x)$ | $p_3(x)$ | $f(0.2)$ | $p_3(0.2)$ |
|--------------|---|----------|------------|
| e^x | $1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$ | 1.2214 | 1.2213 |
| $\sin x$ | $x - \frac{x^3}{6}$ | 0.1987 | 0.1987 |
| $\cos x$ | $1 - \frac{x^2}{2}$ | 0.9801 | 0.9800 |
| $\ln(1 + x)$ | $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$ | 0.1823 | 0.1827 |

d) In der Figur (Storrer Seite 295 o) können Sie den Graphen der Funktion $y = \sin x$ mit jenen der Taylorpolynome

$$p_1(x) = x,$$

$$p_3(x) = x - \frac{x^3}{6},$$

$$p_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120},$$

vergleichen. Sie erkennen, dass in der Nähe von 0 die Annäherung sehr gut ist. In grösserer Entfernung vom Nullpunkt ist die Approximation durch $p_5(x)$ die beste, was kraft unserer Herleitung des Taylorpolynoms nicht verwundert.

Zum Abschluss, noch ein paar Übungen:

1. Berechnen Sie die Summe der folgenden geometrischen Reihe:

$$1 - x^3 + x^6 - x^9 + x^{12} - \dots, \quad |x| < 1$$

2. Verifizieren Sie die bekannten Ableitungsformeln für die Funktionen e^x , $\sin x$, $\cos x$ mal ein bisschen anders.

Wichtig:

1. Lesen Sie jetzt das komplette Kapitel im Storrer I selber durch.
2. Lösen Sie danach mindestens 5 Aufgaben hinten im Kapitel und vergleichen Sie mit den Lösungen am Schluss des Buches. Bei Bedarf lösen Sie mehr Aufgaben.
3. Gehen Sie in die Übungsstunde. Drucken Sie das Übungsblatt dazu *vorher* aus, lesen Sie *vorher* die Aufgaben durch und machen sich erste Gedanken dazu (zum Beispiel, wie man sie lösen könnte).
4. Dann lösen Sie das Übungsblatt: zuerst immer selber probieren, falls nicht geht: Tipp von Mitstudi benutzen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi anschauen, 1 Stunde warten, versuchen, aus dem Kopf heraus wieder zu lösen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi abschreiben (und verstehen - also sollte man insbesondere keine Fehler abschreiben!).
5. Lösen Sie die entsprechenden Prüfungsaufgaben im Archiv.