 Logarithmenpapier Wikipedia für nächstes Mal ausdrucken!

18. EINIGE WICHTIGE FUNKTIONEN UND IHRE ANWENDUNGEN

(18.2) Modifikation einer Funktion

Viele Abhängigkeiten in Natur und Technik werden nicht durch Funktionen in ihrer Reinform beschrieben, das heisst nicht mit Funktionen wie

$$x^2, e^x, \sin(x)$$

und so weiter. Stattdessen müssen diese Funktionen im Normalfall der Realität noch angepasst werden. Die nachfolgenden Modifikationen von Funktionen müssen Sie für Ihr Studium aus dem Stand heraus beherrschen. Sie sind auch häufig in Aufgabe 1 an der Prüfung anzutreffen!

Wir betrachten eine Funktion $f(x)$ und ihren Graphen, der durch die Beziehung $y = f(x)$ gegeben ist. Wir modifizieren nun diese Beziehung auf verschiedene Arten und sehen, was herauskommt. **(Bilder Storrer Seiten 252 und 253)**

a) <u>Verschiebung in x–Richtung</u>

Wir setzen $f_1(x) = f(x - a)$ für $a > 0$. Der Graph von f_1 ist gegenüber dem Graphen von f um die Strecke a nach rechts verschoben. Entsprechend liefert $f(x + a)$, $a > 0$ eine Verschiebung nach links.

b) Verschiebung in y–Richtung

Nun sei $f_2(x) = f(x) + b$ für $b > 0$. Hier wird der Graph von f um b nach oben verschoben. Analog ergibt $f(x) - b$, $b > 0$, eine Verschiebung nach unten.

c) Spiegelung an der y–Achse

Der Graph der Funktion $f_3(x) = f(-x)$ wird durch Spiegelung von f an der y–Achse erhalten.

d) Streckung/Stauchung in x–Richtung

Es sei $c > 0$. Wir untersuchen $f_4(x) = f(cx)$. Der Wert von f_4 an der Stelle x ist gleich jenem von f an der Stelle cx. Deshalb entspricht der Übergang von f zu f_4 einer Streckung in x–Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{c}$. (Für $c > 1$, also $\frac{1}{c} < 1$ handelt es sich anschaulich um eine "Stauchung".)

Ist $c < 0$, so kommt gemäss c) zur Streckung um $\frac{1}{|c|}$ eine Spiegelung an der y–Achse hinzu.

e) Spiegelung an der x–Achse

Dieser Übergang wird durch $f_5(x) = -f(x)$ geleistet.

f) Streckung/Stauchung in y–Richtung

Es sei $s > 0$. Wir untersuchen $f_6(x) = sf(x)$. Der Wert von f_6 an der Stelle x ist das s–fache des Werts von $f(x)$. Der Übergang von f zu f_6 besteht in einer Streckung ($s > 1$) (oder Stauchung ($s < 1$)) in y–Richtung.

Für $s < 0$ kommt gemäss e) eine Spiegelung an der x-Achse hinzu.

Diese verschiedenen Modifikationen können natürlich auch kombiniert werden; im Extremfall zu

$$g(x) = sf\big(c(x-a)\big) + b\ .$$

In (18.3) wird dieses Thema aufgenommen.

Wozu trigonometrische Funktionen:

* Aus der Geometrie (Dreieck) wie im Gymnasium eingeführt.
* unerwartet: zur Integration (vgl Kapitel 17).
* hochmathematisch: periodisch, und damit Bausteine für alle "vernünftigen" periodischen Funktionen.

(18.3) Periodische Funktionen

Es gilt bekanntlich für alle $x \in \mathbb{R}$ (wir verwenden wie üblich das Bogenmass)

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x \ .$$

Ganz allgemein nennt man eine Funktion f *periodisch*, wenn es eine Zahl $p > 0$ gibt mit $f(x + p) = f(x)$ für alle x.

Für die Sinusfunktion kann man $p = 2\pi$ wählen, es wäre aber auch $p = 4\pi, 6\pi$ usw. möglich. Die kleinste positive Zahl p mit der erwähnten Eigenschaft heisst die *Periode* von f (im Fall der Sinusfunktion also $p = 2\pi$).

Periodische Vorgänge sind ja in der Natur sehr häufig (man denke an Schwingungsvorgänge, Biorhythmen oder dergleichen). Somit treten periodische Funktionen in ganz natürlicher Weise auf. Als konkretes Beispiel erwähnen wir das Elektrokardiogramm, das man (mit einer gewissen Idealisierung) als Darstellung einer periodischen Funktion betrachten kann **(Bild Storrer Seite 254)**.

Zunächst scheint diese Kurve überhaupt nichts mit trigonometrischen Funktionen zu tun zu haben. Es gibt aber einen wichtigen mathematischen Satz, der besagt, dass jede einigermassen "vernünftige" periodische Funktion f als eine sogenannte *Fourierreihe*, nämlich als unendliche Reihe der Form

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

dargestellt werden kann. (Die durch die obige EKG-Kurve gegebene Funktion wäre z.B. bereits "vernünftig" genug!) In dieser Formel wird vorausgesetzt, dass f die Periode 2π hat, was durch eine Massstabsänderung leicht erreicht werden kann (siehe unten).

Wir können hier nicht näher auf diese Fourierreihen eingehen. Wir erwähnten sie, um zu zeigen, dass die Bedeutung der trigonometrischen Funktionen weit über die Dreiecksberechnung hinausgeht, bilden sie doch gemäss den obigen Bemerkungen sozusagen Bausteine der periodischen Funktionen.

Von 2π zur beliebigen Periode p **(Bild Storrer Seite 255)**:

Parallele Verschiebung:

Neue Amplitude:

Beispiel (mögliche Prüfungsfrage); gesucht ist eine periodische Funktion h mit folgenden Eigenschaften:

- Periode 48 (Stunden),
- eine Nullstelle (mit wachsender Funktion) für $x = 12$,
- Amplitude 6.

Im Buch kommen hier nochmals die Exponentialfunktion, der radioaktive Zerfall und die C14-Methode vor - bitte nochmals **gründlich** lesen. Dann kommen die hyperbolischen Funktionen und die Area-Funktionen - bitte einfach **einmal gelesen haben**. Danach folgt wichtiger, einfach verdaulicher Stoff in (18.9); bitte auch hier gut lesen. Wichtig für die Anwendungen in den Naturwissenschaften sind dann die logarithmischen Skalen - sie werden sehr ausführlich im Storrer dargestellt. Das Wichtigste nachfolgend. Logarithmenpapier erhält man auf http://de.wikipedia.org/wiki/Logarithmenpapier.

1. Zuerst ein paar Bemerkungen zu Notationen und Bezeichnungen:

2. Eindimensional **(Bild Storrer Seite 264)**

3. Zweidimensional

4. Schlussbemerkungen

Wichtige Beispiele zu logarithmische / exponentielle Zusammenhänge

1. Tonhöhe: Wahrnehmung (Oktave) vs Physik (Frequenzen); im Wesentlichen folgender Zusammenhang:

2. Zum umgangssprachlichen Synonymgebrauch von *logarithmische* vs *exponentielle* Zusammenhänge

3. Richterskala bei Erdbeben; im Wesentlichen folgender Zusammenhang:

4. Die barometrische Höhenformel und der Absturz von Air-France-Flug 447; im Wesentlichen folgender Zusammenhang:

5. ph-Wert:

Wichtig:

1. Lesen Sie jetzt das komplette Kapitel im Storrer I selber durch.

2. Lösen Sie danach mindestens 5 Aufgaben hinten im Kapitel und vergleichen Sie mit den Lösungen am Schluss des Buches. Bei Bedarf lösen Sie mehr Aufgaben.

3. Gehen Sie in die Übungsstunde. Drucken Sie das Übungsblatt dazu *vorher* aus, lesen Sie *vorher* die Aufgaben durch und machen sich erste Gedanken dazu (zum Beispiel, wie man sie lösen könnte).

4. Dann lösen Sie das Übungsblatt: zuerst immer selber probieren, falls nicht geht: Tipp von Mitstudi benutzen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi anschauen, 1 Stunde warten, versuchen, aus dem Kopf heraus wieder zu lösen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi abschreiben (und verstehen - also sollte man insbesondere keine Fehler abschreiben!).

5. Lösen Sie die entsprechenden Prüfungsaufgaben im Archiv.