E. AUSBAU DER INFINITESIMALRECHNUNG

17. UMKEHRFUNKTIONEN (INVERSE FUNCTION)

(17.2) Zyklometrische Funktionen

a) Einleitung

Oft stellt sich die Aufgabe, zu einem gegebenen Wert einer trigonometrischen Funktion, z.B. dem Sinus, den zugehörigen Winkel (hier stets im Bogenmass gemessen) zu bestimmen. Anders formuliert: In der Gleichung

$$y = \sin x \tag{1}$$

ist y gegeben und x gesucht, d.h., wir müssen diese Gleichung nach x auflösen.

Zusammenfassend lässt sich in Worten sagen:

$\arcsin y$ ist die Zahl aus $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, deren Sinus $= y$ ist.

Da also zu jedem y aus $[-1, 1]$ eine eindeutig bestimmte Zahl $\arcsin y$ gehört, wird durch die Zuordnung

$$y \mapsto \arcsin y$$

eine neue Funktion definiert, die Arcussinus-Funktion, kurz der Arcussinus. Ihr Definitionsbereich ist das Intervall $[-1, 1]$. Ganz analog erhält man zu den übrigen trigonometrischen Funktionen die neuen Funktionen Arcuscosinus, Arcustangens, Arcuscotangens (vgl. (17.2.c) bis (17.2.e)). Man fasst diese Funktionen unter den Namen *zyklometrische Funktionen* oder *Arcus-Funktionen* zusammen.

Bevor wir die übrigen Arcus-Funktionen behandeln, untersuchen wir noch einige weitere Eigenschaften des Arcussinus, die aber — entsprechend angepasst — auch für die andern Arcus-Funktionen gelten und weiter unten nicht eigens erwähnt werden.

Definitionsgemäss bedeuten für $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ und $y \in [-1, 1]$ die Aussagen $y = \sin x$ und $x = \arcsin y$ dasselbe. Formelmässig ausgedrückt:

$$y = \sin x \iff x = \arcsin y \, . \tag{2}$$

In einer solchen Situation spricht man von *Umkehrfunktionen* oder von inversen Funktionen (vgl. (17.3)). Man sagt, der Arcussinus sei die Umkehrfunktion des Sinus (oder die zum Sinus inverse Funktion) und umgekehrt.

Was geschieht, wenn man zwei zueinander inverse Funktionen zusammensetzt? Ersetzt man in der Formel $y = \sin x$ die Zahl x durch $\arcsin y$, was wegen (2) zulässig ist, so erhält man

$$y = \sin(\arcsin y), \quad (y \in [-1, 1]) \, . \tag{3}$$

Ebenso kann man in $x = \arcsin y$ für y den Wert $\sin x$ einsetzen und findet

$$x = \arcsin(\sin x), \quad (x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) \, . \tag{4}$$

Zum Schluss dieser Überlegungen geben wir noch den Graphen der Arcussinus-Funktion an. Wir gehen aus von der Beziehung

$$y = \sin x \iff x = \arcsin y \quad \text{für } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \, . \tag{2}$$

Der Graph der (auf das Intervall $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ eingeschränkten) Funktion $y = \sin x$ besteht aus allen Punktepaaren (x, y) mit $y = \sin x$, $(x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$. Wegen (2) beschreiben genau dieselben Punktepaare auch die Beziehung $x = \arcsin y$. Mithin haben $y = \sin x$

und $x = \arcsin y$ denselben Graphen. In der Darstellung $x = \arcsin y$ ist nun aber die unabhängige Variable nicht wie üblich x, sondern y, was ungewohnt ist. Um auf das vertraute Bild zu kommen, müssen wir also noch x und y vertauschen, was einer Spiegelung an der Geraden $y = x$ entspricht.

Somit wird der Graph der Arcussinus-Funktion erhalten, indem man den Graphen der auf $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ eingeschränkten Sinusfunktion an der Geraden $y = x$ spiegelt:

Ganz entsprechende Überlegungen gelten für die übrigen zyklometrischen Funktionen, die nun im einzelnen besprochenen werden.

b) <u>Arcussinus</u>

Der Vollständigkeit halber fassen wir die bereits angestellten Überlegungen nochmals zusammen:

Der Definitionsbereich der Arcussinus-Funktion ist das Intervall $[-1, 1]$. Für jedes $y \in [-1, 1]$ gilt:

$$\arcsin y \text{ ist die Zahl aus } [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \text{ deren Sinus} = y \text{ ist .}$$

Beispiele, Taschenrechner (ohne Gewähr)

c) Arcuscosinus

Genau wie beim Sinus liegen auch die Werte des Cosinus stets im Intervall $[-1,1]$. Der Arcuscosinus ist also nur für $y \in [-1,1]$ definierbar. Der untenstehenden Skizze des Graphen entnimmt man, dass die Gleichung $y = \cos x$ bei gegebenem y genau eine Lösung hat, wenn man (wie schon vorher im Sinne einer Konvention) fordert, dass $x \in [0,\pi]$ sein soll. Mit dieser Abmachung definiert man in fast völliger Analogie zum Arcussinus den Arcuscosinus:

Der Definitionsbereich der Arcuscosinus-Funktion ist das Intervall $[-1,1]$. Für jedes $y \in [-1,1]$ gilt:

$$\arccos y \text{ ist jene Zahl aus } [0,\pi], \text{ deren Cosinus } = y \text{ ist }.$$

d) Arcustangens

Im Gegensatz zu sin und cos nimmt die Funktion tan alle Werte zwischen $-\infty$ und ∞ an. Dies bedeutet, dass der Arcustangens für alle $y \in \mathbb{R}$ definiert werden kann. Zur Erzwingung der Eindeutigkeit beschränkt man sich hier auf das *offene* Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Für die Intervallgrenzen $\pm\frac{\pi}{2}$ ist der Tangens ja nicht mehr definiert!

Die Arcustangens-Funktion ist für jede reelle Zahl definiert. Für jedes $y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\arctan y \text{ ist jene Zahl aus } (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \text{ deren Tangens } = y \text{ ist .}$$

e) <u>Arcuscotangens</u>

Hier geht alles analog zum Arcustangens; die Konvention ist die, dass man sich auf das offene Intervall $(0, \pi)$ einschränkt.

Die Arcuscotangens-Funktion ist für jede reelle Zahl definiert. Für jedes $y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\operatorname{arccot} y \text{ ist jene Zahl aus } (0, \pi), \text{ deren Cotangens } = y \text{ ist .}$$

(17.3) Umkehrfunktionen

Für die ausführlichen Definitionen und Hinweise lesen Sie bitte die Seiten im Storrer. Wir besprechen hier

a) Was will man machen und was kann dabei schiefgehen?
b) Wie schränkt man sich dann ein, damit es nicht mehr schiefgeht?
c) Was kann man dann alles Schönes machen?
d) Berühmte Beispiele

a) Was will man machen und was kann dabei schiefgehen?

b) Wie schränkt man sich dann ein, damit es nicht mehr schiefgeht?

c) Was kann man dann alles Schönes machen?

d) Berühmte Beispiele

(17.4) Die Ableitung der Umkehrfunktion

Wir repetieren hier erstmal die wichtigsten Ableitungen und Stammfunktionen von sinus, cosinus und Konsorten und ihrer Umkehrfunktionen. Diese sind in früheren Kapiteln zum Teil einfach ohne Begründung angegeben worden. Bald werden wir verstehen, warum diese so aussehen.

Graphische Darstellung zur Herleitung der Formel

Rechenbeispiele I:

Rechenbeispiele II:

Wichtig:

1. Lesen Sie jetzt das komplette Kapitel im Storrer I selber durch.
2. Lösen Sie danach mindestens 5 Aufgaben hinten im Kapitel und vergleichen Sie mit den Lösungen am Schluss des Buches. Bei Bedarf lösen Sie mehr Aufgaben.
3. Gehen Sie in die Übungsstunde. Drucken Sie das Übungsblatt dazu *vorher* aus, lesen Sie *vorher* die Aufgaben durch und machen sich erste Gedanken dazu (zum Beispiel, wie man sie lösen könnte).
4. Dann lösen Sie das Übungsblatt: zuerst immer selber probieren, falls nicht geht: Tipp von Mitstudi benutzen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi anschauen, 1 Stunde warten, versuchen, aus dem Kopf heraus wieder zu lösen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi abschreiben (und verstehen - also sollte man insbesondere keine Fehler abschreiben!).
5. Lösen Sie die entsprechenden Prüfungsaufgaben im Archiv.