16. EINIGE LÖSUNGSMETHODEN

(16.2) Anfangsbedingungen (initial conditions)

(16.3) Das Richtungsfeld (slope field; Bilder Storrer Seite 213 und 214)

Wir betrachten wieder allgemein die Differentialgleichung

$$y' = F(x, y) .$$

Ferner sei $y = f(x)$ eine Lösung dieser Gleichung.

Wir wollen den Graphen von f untersuchen. Dazu betrachten wir den Punkt (x_0, y_0) mit $y_0 = f(x_0)$, der natürlich auf dem Graphen von f liegt. Nun ist aber f eine Lösung der obigen Differentialgleichung. Daher gilt

$$f'(x_0) = F(x_0, y_0) .$$

Die Zahl $f'(x_0)$ ist aber gerade die Steigung des Graphen von f (genauer: der Tangente an den Graphen von f) im Punkt (x_0, y_0). Mit anderen Worten: Die Lösungskurve, welche durch (x_0, y_0) geht, hat in diesem Punkt die Steigung $F(x_0, y_0)$. Entscheidend ist nun, dass wir diese Steigung berechnen können, ohne die Lösungsfunktion $f(x)$ zu kennen, denn $F(x, y)$ ist ja gegeben.

Beispiel

Es sei $y' = x - y + 1$. (In (16.6.1) werden wir diese Gleichung formelmässig lösen). Wir tabellieren zunächst y' in Abhängigkeit von x und y.

y \ x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2	-4	-3	-2	-1	0	1	2
1	-3	-2	-1	0	1	2	3
0	-2	-1	0	1	2	3	4
-1	-1	0	1	2	3	4	5
-2	0	1	2	3	4	5	6

Dann zeichnen wir durch jeden Punkt (x, y) der Ebene ein kurzes Geradenstück mit der zugehörigen Steigung $y' = F(x, y) = x - y + 1$. Im Punkt $(1, 1)$ hat das Stück die Steigung $F(1, 1) = 1$, im Punkt $(0, 2)$ die Steigung $F(0, 2) = -1$ usw. Wir erhalten so das handgefertigte Bild links. Selbstverständlich kann man das Rechnen und Zeichnen auch einem Computer übertragen, der umfangreichere Bilder wie jenes rechts produziert.

Das in den Skizzen dargestellte Bild heisst das *Richtungsfeld* der Differentialgleichung. Wenn (wie im zweiten Fall) genügend viele "Richtungselemente" eingezeichnet sind, lässt sich der Verlauf von Lösungskurven näherungsweise erkennen. Die zwei eingezeichneten Kurven sind Beispiele von speziellen Lösungen der Differentialgleichung. Da die obere u.a. durch den Punkt $(0, 1)$ geht, handelt es sich dabei um die spezielle

Lösung zur Anfangsbedingung $(x_0, y_0) = (0, 1)$; entsprechend gehört die untere Kurve (z.B.) zur Anfangsbedingung $(x_0, y_0) = (0, -2)$. Ganz allgemein sieht man, dass hier durch jeden Punkt der Ebene eine Lösungskurve geht.

Die Entstehung dieser Lösungskurve kann man sich anschaulich so vorstellen: Man beginnt bei (x_0, y_0), geht dort in Richtung $y' = F(x_0, y_0)$ ein kleines Stück weiter bis zu einem Punkt (x_1, y_1), rechnet sich dort die neue Steigung $F(x_1, y_1)$ aus, geht in dieser Richtung weiter bis nach (x_2, y_2) usw. Auf diese Weise erhält man einen Streckenzug, der um so genauer die Kurve durch (x_0, y_0) approximiert, je kleiner die Schritte sind. Im Grenzfall ("unendlich kleine" Schritte, mit Vorsicht zu geniessen) kommt die gesuchte Lösungskurve heraus (vgl. (21.4)).

Ein weiterer Blick auf das Richtungsfeld lässt schliesslich die Vermutung aufkommen, die Funktion $y = x$ könnte eine spezielle Lösung der Differentialgleichung $y' = x - y + 1$ sein. Dies lässt sich sofort rechnerisch bestätigen. In der Tat ist $y' = 1$ und $x - y + 1 = x - x + 1 = 1$, so dass für alle x die Gleichung $y' = x - y + 1$ erfüllt ist.

Es folgen zwei weitere Beispiele. In diesen einfachen Fällen lassen sich die Lösungen der Differentialgleichung durch Betrachten des Richtungsfeldes erraten:

- Im ersten Beispiel sind die Lösungskurven Parabeln (tatsächlich ist $y = \frac{1}{2}x^2 + C$ die allgemeine Lösung).

- Im zweiten Beispiel sind die Lösungskurven Kreise um den Koordinatenursprung (vgl. die rechnerische Lösung in (16.10.3)).

$y' = x$ $\qquad\qquad\qquad$ $y' = -\dfrac{x}{y}$

Zum Schluss sei noch darauf hingewiesen, dass die Richtungsfelder nicht mit den Vektorfeldern von (14.3) verwechselt werden dürfen.

(16.4) Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Wir kommen nun zur ersten systematischen Lösungsmethode. Sie betrifft die sogenannten "linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung".

Eine Differentialgleichung 1. Ordnung heisst *linear*, wenn sie die Form

$$y' = p(x)y + q(x)$$

hat, wo p und q Funktionen von x sind.

Die Bezeichnung "linear" bezieht sich einzig darauf, dass y (und y') nur in der ersten Potenz vorkommen. Die Funktionen $p(x)$ und $q(x)$ dagegen brauchen keineswegs linear zu sein.

Bei linearen Differentialgleichungen unterscheiden wir zwei Fälle:

Eine lineare Differentialgleichung heisst *homogen*, wenn $q(x) = 0$ ist, andernfalls nennt man sie *inhomogen*.

Wenn

$$y' = p(x)y + q(x)$$

eine lineare Differentialgleichung ist, dann heisst

$$y' = p(x)y$$

die *zugehörige homogene Gleichung*. Beispielsweise ist $y' = xy + 1$ eine inhomogene lineare Differentialgleichung (1. Ordnung) und $y' = xy$ ist die zugehörige homogene Gleichung.

(16.5) Das Lösungsverfahren für lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

a) Allgemeines

Man löst eine lineare Differentialgleichung, indem man zuerst die zugehörige homogene Gleichung löst und anschliessend mit der Methode der "Variation der Konstanten" die Lösungen der ursprünglichen Gleichung findet. Dies führen wir nun im Detail durch.

b) Lösung der homogenen Gleichung

Es sei

$$y' = p(x)y$$

eine homogene lineare Differentialgleichung. Die Lösung lässt sich erraten: Es sei $P(x)$ eine beliebige Stammfunktion von $p(x)$ (d.h. $P'(x) = p(x)$). Dann ist

$$\boxed{y = Ke^{P(x)}, \quad K \text{ eine beliebige Konstante}}$$

die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung, denn Ableiten ergibt unter Benutzung der Kettenregel

$$y' = Ke^{P(x)} \cdot P'(x) = Ke^{P(x)} \cdot p(x) = p(x)y\ .$$

Es sei noch darauf hingewiesen, dass die konstante Funktion $y = 0$ stets Lösung einer homogenen linearen Differentialgleichung ist (setze $K = 0$) und nachrechnen:

Beispiele

1. $y' = y \sin x: \quad p(x) = \sin x,\ P(x) = -\cos x$
   Lösung: $y = Ke^{-\cos x}$; nachrechnen:

2. $y' = e^x y,\ x > 0.$

c) Lösung der inhomogenen Gleichung ("Variation der Konstanten")

Wir betrachten jetzt wieder die inhomogene lineare Differentialgleichung

(1) $$y' = p(x)y + q(x)$$

und die zugehörige homogene Gleichung

(2) $$y' = p(x)y\ .$$

Nach dem eben Gesagten hat (2) die allgemeine Lösung

(3) $$y = Ke^{P(x)}\ ,$$

wo $P(x)$ eine Stammfunktion von $p(x)$ ist.

Nun wenden wir die Methode der *"Variation der Konstanten"* an. Sie besteht darin, dass man für die Lösung der inhomogenen Gleichung (1) den *Ansatz*

$$\boxed{y = K(x)e^{P(x)}} \tag{4}$$

macht. Man ersetzt also in (3) die Konstante K durch eine vorläufig noch unbekannte Funktion $K(x)$, welche man so zu bestimmen sucht, dass (4) eine Lösung von (1) ist.

Um diese Funktion $K(x)$ zu finden, leiten wir die Funktion y ab (Produkt- und Kettenregel!):

$$y' = K'(x)e^{P(x)} + K(x)p(x)e^{P(x)} . \tag{5}$$

Dabei haben wir noch benutzt, dass $P'(x) = p(x)$ ist. Nun setzen wir y aus (4) und y' aus (5) in die ursprüngliche Gleichung

$$y' = p(x)y + q(x)$$

ein. Wir erhalten

$$K'(x)e^{P(x)} + \underline{K(x)p(x)e^{P(x)}} = \underline{p(x)K(x)e^{P(x)}} + q(x) .$$

Die unterstrichenen Terme heben sich weg (was der Sinn des Ansatzes war) und es bleibt

$$K'(x)e^{P(x)} = q(x) .$$

Durch Multiplikation mit dem Reziproken $e^{-P(x)}$ von $e^{P(x)}$ finden wir weiter

$$K'(x) = q(x)e^{-P(x)} ,$$

woraus man $K(x)$ als Stammfunktion von $q(x)e^{-P(x)}$ bestimmen kann:

$$K(x) = \int q(x)e^{-P(x)}\,dx + C .$$

Schliesslich setzt man den so erhaltenen Ausdruck für $K(x)$ in den Ansatz (4) ein und findet als Lösung der inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y = \left(\int q(x)e^{-P(x)}\,dx + C\right) e^{P(x)} ,$$

wo $P(x)$ eine beliebige Stammfunktion von $p(x)$ ist. Anders formuliert:

$$y = (K_0(x) + C)e^{P(x)} , \tag{6}$$

wo $K_0(x)$ eine beliebige, fest gewählte Stammfunktion von $q(x)e^{-P(x)}$ ist.

Die Methode für die Lösung einer inhomogenen linearen Differentialgleichung

$$y' = p(x)y + q(x)$$

lautet also zusammengefasst:

1) Man löst die zugehörige homogene Differentialgleichung

$$y' = p(x)y \; .$$

Die Lösung hat die Form

$$y = Ke^{P(x)} \; ,$$

wo $P(x)$ eine Stammfunktion von $p(x)$ ist.

2) Man variiert die Konstante K, d.h., man macht den Ansatz

$$y = K(x)e^{P(x)} \; ,$$

wo $K(x)$ eine noch zu bestimmende Funktion ist.

3) Geht man mit diesem Ansatz in die ursprüngliche inhomogene Differentialgleichung ein, so erhält man nach einigen Umformungen eine Beziehung für $K'(x)$, aus der man $K(x)$ zu bestimmen sucht.

(16.6) Beispiele zum Lösungsverfahren - andere Beispiele als im Storrer

1. $y' = -y + e^x$

2. $y' = \frac{y}{x} + 1 \quad (x > 0)$

(16.9) Separation der Variablen

Wir kommen nun zu einer weiteren systematischen Lösungsmethode, der *Separation* (oder Trennung) *der Variablen*. Sie lässt sich immer dann anwenden, wenn die Differentialgleichung die Form

$$\boxed{y' = r(x)s(y)}$$

hat, d.h. wenn sich die rechte Seite $F(x, y)$ als Produkt von zwei Funktionen einer Variablen (einmal von x und einmal von y) schreiben lässt. Als Spezialfälle können die Funktionen $r(x)$ bzw. $s(y)$ auch den konstanten Wert 1 annehmen, so dass sich auch die Differentialgleichungen

$$y' = r(x) \quad \text{und} \quad y' = s(y)$$

dem Verfahren unterordnen.

Wir illustrieren mal das Verfahren anhand eines einfachen, bekannten Beispiels; $y' = \alpha y$, wo $y > 0$ und $t > 0$; $\alpha \in \mathbb{R}$:

In dieser Situation geht man nach folgender Methode vor:

1) Schreibe die Differentialgleichung in der Form

$$\frac{dy}{dx} = r(x)s(y) \ .$$

2) Bringe alle Terme mit y auf die linke, alle Terme mit x auf die rechte Seite. Dabei muss man formal mit dx multiplizieren:

$$\frac{dy}{s(y)} = r(x)\,dx \ .$$

3) Bilde auf beiden Seiten das unbestimmte Integral

$$\int \frac{dy}{s(y)} = \int r(x)\,dx + C \ .$$

Integrationskonstante C nicht vergessen!*

Man erhält so die Beziehung

$$S(y) = R(x) + C \ ,$$

wo $S(y)$ eine Stammfunktion von $\frac{1}{s(y)}$, $R(x)$ eine solche von $r(x)$ ist. Durch diese Beziehung wird y "implizit" als Funktion von x gegeben. Dieses y ist dann die allgemeine Lösung der Differentialgleichung.

4) Löse (wenn möglich) nach y auf.

5) Kontrolliere, ob es konstante Lösungen gibt, die noch nicht erfasst wurden.

Kommentar zu 5); finden Sie konstante Lösungen zu $y' = x(y^2 - 4)$.

* Eigentlich tritt bei jedem Integral eine solche Konstante auf; man fasst die beiden aber zusammen.

(16.10) Beispiele zur Separation der Variablen

1. Die lineare homogene Differentialgleichung

Wir haben bereits in (16.5.b) gesehen, dass die Differentialgleichung

$$y' = p(x)y$$

die allgemeine Lösung

$$y = Ke^{P(x)}$$

hat, wo $P(x)$ eine Stammfunktion von $p(x)$ ist.

Man kann diese Gleichung auch mit Separation der Variablen lösen. Wir zeigen diese Möglichkeit an einem konkreten Beispiel, nämlich an der Gleichung

$$y' = e^x y \ ,$$

und gehen dazu die fünf Schritte des “Rezepts” von (16.9) der Reihe nach durch.

2. Die lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten

Die Differentialgleichung

$$y' = ay + b, \ a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0$$

wurde bereits im Storrer (nicht in der Vorlesung) in (16.8) gelöst. Unser neues Verfahren bewährt sich aber ebenfalls. Wir schreiben

$$y' = a(y + \frac{b}{a})$$

(d.h., es ist $r(x) = a, \ s(y) = y + \frac{b}{a}$).

3. $y' = -\dfrac{x}{y}$ (Richtungsfeld in (16.3)).

4. $y' = e^{x-y}$ (nicht im Storrer)

(16.12) Die Differentialgleichung $y' = a(A-y)(B-y)$

Differentialgleichungen dieses Typs haben wir in (15.3), Gleichungen (4) und (7), angetroffen: Ausbreitung von Epidemien (jetzt nur Variante Luchsinger mit "$\frac{1}{B}$", damit wir *Anteil* Gesunde und damit internationale Vergleichbarkeit der Paramter c haben; ohne "$\frac{1}{B}$" im Storrer) und bimolekulare Reaktionen:

$$(4)\ \ N'(t) = cN(t)(B - N(t))\frac{1}{B} \qquad ; \qquad (7)\ \ x'(t) = K(a - x(t))(b - x(t)).$$

Wir betrachten hier nur den Fall, wo $A \neq B$ ist:

$$y' = a(A-y)(B-y), \quad A \neq B\ .$$

Es handelt sich hier um eine nichtlineare Differentialgleichung 1. Ordnung. Da die rechte Seite eine Funktion von y allein ist, können wir sie mit Separation der Variablen lösen. Dies ist zwar nicht schwierig, aber kompliziert und damit für eine Grossvorlesung nicht geeignet. Bitte lesen Sie die Lösungsschritte im Storrer durch. Man erhält am Schluss:

$$\boxed{y = A + \frac{B-A}{1 + Ke^{a(B-A)x}}\ .}$$

Damit haben wir insbesondere die Differentialgleichungen (4) und (7) von (15.3) gelöst. Die Gleichung (4) (eingeschränktes Wachstum) lautet

$$\begin{aligned} y' &= cy(B-y) \\ &= -c(0-y)(B-y)\ . \end{aligned}$$

Wir können also in der obigen Lösungsformel $a = -c$ und $A = 0$ setzen. Die Lösung lautet dann

$$y = \frac{B}{1 + Ke^{-cBx}}, \quad c > 0,\ B > 0$$

oder, in der Bezeichnung von (15.3.c)-Variante Luchsinger,

$$\boxed{N(t) = \frac{B}{1 + Ke^{-ct}}, \quad c > 0,\ B > 0\ .}$$

Eine Funktion dieses Typs heisst eine *logistische Funktion*. Ihr Graph ist S-förmig, wie sich aus der folgenden Kurvendiskussion ergeben wird. Manche Wachstumsvorgänge werden recht gut durch eine solche Funktion wiedergegeben. Untersuchen Sie trainingshalber als Einstimmung erstmal den einfachsten Fall von

$$N(t) = \frac{1}{1 + e^{-t}},$$

wo Sie t von $-\infty$ bis ∞ gehen lassen.

Was ist danach die Rolle von B, K und c?

Die Integrationskonstante K wird durch die Anfangsbedingung bestimmt: Zur Zeit t_0 sei die Grösse der Population $= N_0$. Aus

$$N_0 = N(t_0) = \frac{B}{1 + Ke^{-ct_0}}$$

erhält man durch Auflösen nach K

$$K = \frac{B - N_0}{N_0}\ e^{ct_0}\ .$$

Setzt man dies in $(*)$ ein, so findet man die Formel

$$N(t) = \frac{B}{1 + \frac{B-N_0}{N_0} e^{-c(t-t_0)}} = \frac{BN_0}{N_0 + (B - N_0)e^{-c(t-t_0)}}.$$

Näheres zur logistischen Funktion

Bezeichnungen: in *dieser* Vorlesung gilt: **Spezielle** Lösung ist eine Lösung zu gegebenen Anfangsbedingungen (im Gegensatz zur **allgemeinen** Lösung). **Konstante (=stationäre)** Lösungen sind Lösungen, welche sich im Zeitverlauf nicht ändern. **Singuläre** Lösungen sind solche, welche bei der Methode der Separation der Variablen in der allgemeinen Lösung nicht vorhanden sind - sie sind auch konstant.

Wichtig:

1. Lesen Sie jetzt das komplette Kapitel im Storrer I selber durch.
2. Lösen Sie danach mindestens 5 Aufgaben hinten im Kapitel und vergleichen Sie mit den Lösungen am Schluss des Buches. Bei Bedarf lösen Sie mehr Aufgaben.
3. Gehen Sie in die Übungsstunde. Drucken Sie das Übungsblatt dazu *vorher* aus, lesen Sie *vorher* die Aufgaben durch und machen sich erste Gedanken dazu (zum Beispiel, wie man sie lösen könnte).
4. Dann lösen Sie das Übungsblatt: zuerst immer selber probieren, falls nicht geht: Tipp von Mitstudi benutzen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi anschauen, 1 Stunde warten, versuchen, aus dem Kopf heraus wieder zu lösen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi abschreiben (und verstehen - also sollte man insbesondere keine Fehler abschreiben!).
5. Lösen Sie die entsprechenden Prüfungsaufgaben im Archiv.