

Dieses Skript ist ein Auszug mit Lücken aus "Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften I" von Hans Heiner Storrer, Birkhäuser Skripten. Als StudentIn sollten Sie das Buch auch kaufen und im Verlauf der Vorlesung MAT 182 vollständig durcharbeiten. Für Ihre eigenen Bedürfnisse in dieser Vorlesung MAT 182 dürfen Sie dieses PDF-Dokument abspeichern und beliebig ändern. Für eine weitergehende Verwendung ausserhalb der Vorlesung MAT 182 kontaktiere man bitte vorgängig den Dozenten Christoph Luchsinger, Universität Zürich. Das Copyright ist bei Birkhäuser!

## D. DIFFERENTIALGLEICHUNGEN DGL

### 15. DER BEGRIFF DER DIFFERENTIALGLEICHUNG (DIFFERENTIAL EQUATION)

(15.2) Allgemeine Informationen zum radioaktiven Zerfall - nicht im Storrer

Periodensystem mit Neutronenüberschuss bei den hohen Ordnungszahlen:

$$\frac{N}{Z} \doteq 1 + 0.015(N + Z)^{2/3},$$

Isotope zerfallen, wenn sie zu weit vom Stabilitätstal entfernt sind, durch  $\alpha$ -Zerfall (ab  $N + Z > 200$ ),  $\beta^-$ -Zerfall (wenn man zu viele Neutronen hat),  $\beta^+$ -Zerfall (wenn man zu viele Protonen hat); der  $\gamma$ -Zerfall ist dann Begleiter von obigem. Es gibt das folgende Stabilitätstal:

Für die Motivation der ersten DGL, welche wir betrachten (15.3 a), interessieren wir uns zunächst für den *Zeitpunkt des Zerfalls eines Isotops*. Die Zeit bis zum Zerfall eines einzelnen, gegebenen Isotops ist zufällig, nicht vorhersehbar und gedächtnislos. Man spricht von spontanem Zerfall (spontaneous decay), bis ein stabiler Zustand erreicht ist. Die Atome zerfallen unabhängig voneinander (sofern keine Kettenreaktionen stattfinden). Wegen diesen physikalischen Erkenntnissen schliessen wir, dass von einem Kilogramm Pu239 eine gewisse Menge in der kommenden Stunde zerfallen wird. Wenn wir 2 Stunden warten, wird etwa die doppelte Menge zerfallen. Wenn wir zudem die Anfangsmenge verdoppeln (oder halbieren), dann wird doppelt (halb) so viel zerfallen. **Zusammengefasst ist die Abnahme der Menge Pu239 proportional zur Zeitdauer und zur aktuellen Menge.** Diese Erkenntnis lassen wir in der kommenden Seite in die Modellierung einfließen.

Kurzer Exkurs zu Kernenergie/-waffen:

\* Wenn schwere Isotope gespalten werden, haben wir einen Neutronenüberschuss. Diese überschüssigen Neutronen können dann weitere Atome spalten, das ergibt die Kettenreaktion.

\* Die Energie gewinnt man durch  $E = mc^2$  aus dem Massendefekt (die Teile sind leichter als die Ausgangsprodukte! - der Rest wurde in Energie umgewandelt). Wir haben in diesem Zusammenhang folgende Kurve:

(15.3) Beispiele von Differentialgleichungen
--

a) Radioaktiver Zerfall

a1) Modellierung

a2) Bemerkungen dazu

Exponentiell vs Geometrisch,  $e^{\lambda t}$ ,  $e^{-\lambda t}$

Halbwerts- und Verdoppelungszeiten; radioaktive Abfälle

Die C-14-Methode zur Altersbestimmung

b) Wachstum von Populationen



c) Ausbreitung einer Infektion

e) Bimolekulare Reaktionen

Beispiele zu DGL-*Systemen* - nicht im Storrer:

Erraten Sie eine Lösung von:

SIR

Lanchester-DGL

Lotka-Volterra-Gleichungen (auch als Räuber-Beute-Gleichungen bekannt, freiwillig):  
siehe Web oder angegebene alte Vorlesungen in Basel von Herrn Luchsinger.

Was könnte an der Prüfung zu DGL-*Systemen* kommen?

(15.4) Allgemeines über Differentialgleichungen

Was für DGL gibt es alles? Paar Hinweise:

Die allgemeine Form einer expliziten DGL 1. Ordnung lautet  $y' = F(x, y)$ , wo  $F$  eine Funktion von zwei Variablen ist. Beispiele werden wir zur Genüge sehen, wie etwa

$$y' = \frac{2y}{x}$$
$$y' = x - y + 1, \quad \text{usw. .}$$

Wir halten hier noch formell fest, was man unter einer *Lösung* der Differentialgleichung  $y' = F(x, y)$  versteht: Eine Funktion  $y = f(x)$  heisst Lösung dieser DGL, wenn für alle  $x$  aus dem Definitionsbereich  $D$  gilt  $f'(x) = F(x, f(x))$ .

**Wichtig:**

1. Lesen Sie jetzt das komplette Kapitel im Storrer I selber durch.
2. Lösen Sie danach mindestens 5 Aufgaben hinten im Kapitel und vergleichen Sie mit den Lösungen am Schluss des Buches. Bei Bedarf lösen Sie mehr Aufgaben.
3. Gehen Sie in die Übungsstunde. Drucken Sie das Übungsblatt dazu *vorher* aus, lesen Sie *vorher* die Aufgaben durch und machen sich erste Gedanken dazu (zum Beispiel, wie man sie lösen könnte).
4. Dann lösen Sie das Übungsblatt: zuerst immer selber probieren, falls nicht geht: Tipp von Mitstudi benutzen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi anschauen, 1 Stunde warten, versuchen, aus dem Kopf heraus wieder zu lösen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi abschreiben (und verstehen - also sollte man insbesondere keine Fehler abschreiben!).
5. Lösen Sie die entsprechenden Prüfungsaufgaben im Archiv.