14. INTEGRATION VON VEKTORFUNKTIONEN

(14.2) Gewöhnliche Integration von Vektorfunktionen

Eine Vektorfunktion $\vec{x}(t)$, gegeben durch

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix},$$

wird bekanntlich (vgl. (8.5)) koordinatenweise abgeleitet:

$$\dot{\vec{x}} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{pmatrix}.$$

Ganz analog kann man das bestimmte Integral koordinatenweise berechnen. Wir definieren:

$$\boxed{\int_a^b \vec{x}(t)\,dt = \begin{pmatrix} \int_a^b x_1(t)\,dt \\ \int_a^b x_2(t)\,dt \\ \int_a^b x_3(t)\,dt \end{pmatrix}.}$$

Der Wert dieses Integrals ist also wieder ein Vektor. Wir betrachten nun Anwendungen dieses Konzepts.

Beispiele

Zur Vorbereitung repetieren wir aus Kapitel 9 den Zusammenhang zwischen Geschwindigkeit und Strecke im eindimensionalen Fall.

1. Von einem bewegten Massenpunkt sei der Geschwindigkeitsvektor

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \end{pmatrix}$$

zu einem beliebigen Zeitpunkt t bekannt. Zur Zeit t_0 befinde er sich an der durch den Ortsvektor $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$ gegebenen Stelle. Wo befindet er sich zum Zeitpunkt t?

Es sei $\vec{x}(t)$ der Ortsvektor des Massenpunkts zur Zeit t. Nach (8.4) ist dann $\vec{v}(t) = \dot{\vec{x}}(t)$. Für die 1. Koordinatenfunktion gilt daher

$$v_1(t) = \dot{x}_1(t) \ .$$

Durch Integration erhalten wir

$$\int_{t_0}^{t} v_1(u)\, du = \int_{t_0}^{t} \dot{x}_1(u)\, du = x_1(t) - x_1(t_0) \ ,$$

denn $x_1(t)$ ist natürlich eine Stammfunktion von $\dot{x}_1(t)$. (Da die obere Integrationsgrenze t heisst, wurde die Integrationsvariable neu mit u bezeichnet.) Analoge Formeln gelten für die beiden andern Koordinaten. Diese drei Beziehungen lassen sich gemäss der obenstehenden Definition zur folgenden Vektorgleichung zusammenfassen:

$$\int_{t_0}^{t} \vec{v}(u)\, du = \vec{x}(t) - \vec{x}(t_0) \ .$$

Wir erhalten als Antwort auf die eingangs gestellte Frage

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(t_0) + \int_{t_0}^{t} \vec{v}(u)\, du \ . \qquad \boxtimes$$

Wir stellen fest, dass die Integration auch für Vektoren als Umkehrung der Differentiation betrachtet werden kann (vgl. (12.8), wo auch das eindimensionale Analogon der obigen Formel steht).

Ein konkretes Beispiel: Ein Punkt bewegt sich im Raum mit der Geschwindigkeit

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 - 3t^2 \\ 1 + 4t^3 \end{pmatrix} .$$

Wo ist er zur Zeit $t = 2$, wenn er zur Zeit $t = 0$ a) im Nullpunkt, b) im Punkt $P(1, -1, 2)$ war?

(14.3) Vektorfelder (vector field)

Bis jetzt haben wir Vektorfunktionen $\vec{x}(t)$ betrachtet, bei denen der Vektor $\vec{x}$ vom Parameter t, also nur von einer Variablen, abhing. Nun wollen wir Vektoren untersuchen, die vom Ort (welcher durch drei Variablen, nämlich die drei Koordinaten, beschrieben wird) abhängen. Diese Situation lässt sich darstellen, indem man in jedem Punkt X des Raumes den zu X gehörigen Vektor aufzeichnet. Die Länge und die Richtung dieses Vektors können sich von Punkt zu Punkt ändern. Die untenstehenden Illustrationen sind aus zeichnerischen Gründen zweidimensional; in Wirklichkeit hat man sich die Situation räumlich vorzustellen.

a) Eine Flüssigkeit strömt durch eine Röhre. In jedem Punkt X ist die an dieser Stelle herrschende Strömungsgeschwindigkeit (ein Vektor!) eingezeichnet:

b) Windgeschwindigkeit. In jedem Punkt eines gewissen Teils der Lufthülle ist die zugehörige Windgeschwindigkeit eingetragen (hier scheint gerade ein Wirbelsturm zu wüten):

c) Kraftfelder. Dies ist eine wichtige physikalische Anwendung. In jedem Punkt des Raumes (oder eines Teilgebiets davon) wirkt eine bestimmte Kraft, deren Grösse und Richtung im allgemeinen von ihrem Angriffspunkt abhängt:

Nun betrachten wir die Situation allgemein. Um den Punkt X vektoriell darstellen zu können, wählen wir einen Ursprung O. Zum Punkt X gehört dann ein Ortsvektor, nämlich der Vektor $\vec{x} = \overrightarrow{OX}$. Da der im Punkt X angebrachte Vektor $\vec{F}$ von X und damit von $\vec{x}$ abhängt, schreibt man dafür $\vec{F}(\vec{x})$.

Damit liegt eine Funktion vor, welche jedem Vektor $\vec{x}$ des Raumes einen neuen Vektor

$$\vec{F}(\vec{x})$$

zuordnet, also eine Funktion, die auf $\mathbb{R}^3$ definiert ist und Werte in $\mathbb{R}^3$ annimmt:

$$\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3.$$

Eine solche Funktion nennt man ein *Vektorfeld*. Wenn der Vektor $\vec{F}$ eine Kraft darstellt, wie im Beispiel c), dann spricht man auch von einem *Kraftfeld*.

Der Vektor $\vec{F} = \vec{F}(\vec{x})$ ist wie üblich durch seine drei Koordinatenfunktionen gegeben:

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} F_1(\vec{x}) \\ F_2(\vec{x}) \\ F_3(\vec{x}) \end{pmatrix}.$$

Dabei sind die Funktionswerte $F_1(\vec{x})$, $F_2(\vec{x})$, $F_3(\vec{x})$ reelle Zahlen, welche vom Vektor

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

also jeweils von drei reellen Zahlen abhängen. F_1, F_2 und F_3 sind somit (reellwertige) Funktionen von drei Variablen. Auf Funktionen von mehreren Variablen wird später noch genauer eingegangen (Kapitel 22). Es folgen zwei formelmässig gegebene Beispiele:

1. Elektrostatisches Feld einer Punktladung:

Eine allgemeine Schlussfolgerung aus dem ersten Beispiel, erklärt am Beispiel von "Handy"strahlen:

Weitere Beispiele zu dieser Schlussfolgerung:

2. Wenn die involvierten Funktionen nicht so gut bekannt sind, hilft eine Wertetabelle **(Bilder Storrer Seite 188 und 189)**:

(14.4) Kurvenintegrale (line integral, path integral, curve integral, and curvilinear integral)

Vorbereitung:

Ausführung:

Somit können wir zusammenfassend sagen: Die in der besprochenen Situation geleistete Arbeit ist definiert durch

$$W = \int_a^b \vec{F}(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t)\, dt \,.$$

Ein Integral dieser Form heisst ein Kurvenintegral. Es kann auch für beliebige Vektorfelder, unabhängig vom Begriff der Arbeit, definiert werden. Wir halten also allgemein fest:

Es sei $\vec{F} = \vec{F}(\vec{x})$ ein beliebiges Vektorfeld und C sei ein Kurvenstück, gegeben durch die Parameterdarstellung $\vec{x} = \vec{x}(t)$ $(t \in [a, b])$. Unter dem *Kurvenintegral* (oder Linienintegral) von $\vec{F}$ über C versteht man das Integral

$$\int_a^b \vec{F}(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t)\, dt \,. \tag{1}$$

Beachten Sie, dass es sich bei (1) um ein ganz gewöhnliches Integral einer Funktion einer Variablen handelt.

Ist die Definition des Kurvenintegrals einmal vorhanden, so kann man den Begriff der Arbeit in seiner allgemeinsten Form als ein derartiges Kurvenintegral definieren — die motivierenden Betrachtungen haben gezeigt, dass das Kurvenintegral für diesen Zweck unentbehrlich ist.

Schreibt man die Vektoren in Komponentenform

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} F_1(\vec{x}) \\ F_2(\vec{x}) \\ F_3(\vec{x}) \end{pmatrix}, \qquad \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix},$$

so erhält man, ausführlich geschrieben:

$$\boxed{\int_a^b \vec{F}(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t)\, dt = \int_a^b \big(F_1(\vec{x}(t))\dot{x}_1(t) + F_2(\vec{x}(t))\dot{x}_2(t) + F_3(\vec{x}(t))\dot{x}_3(t)\big)\, dt \,.} \tag{2}$$

Unter Verwendung der Formeln (1) oder (2) lassen sich Kurvenintegrale berechnen (siehe (14.6), wo auch ein Rechenschema angegeben ist).

(14.5) Weitere Informationen über Kurvenintegrale

(14.6) Beispiele zur Berechnung von Kurvenintegralen

3. Zu berechnen sei $\int_C \vec{x} \cdot d\vec{x}$, wobei C der Einheitskreis in der x-y–Ebene sei. Für C können wir die Parameterdarstellung aus (8.2.2) wählen:
$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi] \; .$$
Das Vektorfeld $\vec{F}(\vec{x})$ ist hier schon als Integrand gegeben, nämlich durch $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{x}$, in Koordinaten also einfach
$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} .$$
Unser Rechenschema liefert
$$\vec{F}(\vec{x}(t)) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \dot{\vec{x}}(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} .$$
Für den Integranden $\vec{F}(\vec{x}(t)) \cdot \dot{\vec{x}}(t)$ erhält man
$$\cos t(-\sin t) + \sin t \cos t = 0 \; .$$
Damit wird auch das Kurvenintegral
$$\int_C \vec{x} \cdot d\vec{x} = 0 \; . \qquad \boxtimes$$

Die Tatsache, dass der Integrand gleich Null ist, hat eine ganz anschauliche Begründung: Da die Kurve C ein Kreis ist, steht der Tangentialvektor $\dot{\vec{x}}$ stets senkrecht auf dem Vektor $\vec{x}$ $(= \vec{F}(\vec{x}))$. Das Skalarprodukt ist also Null. Noch etwas anschaulicher und mit gebührender Vorsicht: Fassen wir $\vec{F}$ als Kraftfeld auf, so steht bei einer Kreisbewegung die Kraft $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{x}$ stets senkrecht auf dem "unendlich kleinen" Kurvenstück $d\vec{x}$. Somit ist das Skalarprodukt $\vec{x} \cdot d\vec{x} = 0$ und damit auch die geleistete Arbeit: $\int_C \vec{x} \cdot d\vec{x} = 0$.

Wichtig:

1. Lesen Sie jetzt das komplette Kapitel im Storrer I selber durch.
2. Lösen Sie danach mindestens 5 Aufgaben hinten im Kapitel und vergleichen Sie mit den Lösungen am Schluss des Buches. Bei Bedarf lösen Sie mehr Aufgaben.
3. Gehen Sie in die Übungsstunde. Drucken Sie das Übungsblatt dazu *vorher* aus, lesen Sie *vorher* die Aufgaben durch und machen sich erste Gedanken dazu (zum Beispiel, wie man sie lösen könnte).
4. Dann lösen Sie das Übungsblatt: zuerst immer selber probieren, falls nicht geht: Tipp von Mitstudi benutzen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi anschauen, 1 Stunde warten, versuchen, aus dem Kopf heraus wieder zu lösen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi abschreiben (und verstehen - also sollte man insbesondere keine Fehler abschreiben!).
5. Lösen Sie die entsprechenden Prüfungsaufgaben im Archiv.