Dieses Skript ist ein Auszug mit Lücken aus "Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften I" von Hans Heiner Storrer, Birkhäuser Skripten. Als StudentIn sollten Sie das Buch auch kaufen und im Verlauf der Vorlesung MAT 182 vollständig durcharbeiten. Für Ihre eigenen Bedürfnisse in dieser Vorlesung MAT 182 dürfen Sie dieses PDF-Dokument abspeichern und beliebig ändern. Für eine weitergehende Verwendung ausserhalb der Vorlesung MAT 182 kontaktiere man bitte vorgängig den Dozenten Christoph Luchsinger, Universität Zürich. **Kapitel 20 wird zwischen Kapitel 12 und 13 besprochen; bitte Unterlagen mitnehmen!**

12. STAMMFUNKTIONEN UND DAS UNBESTIMMTE INTEGRAL

(12.1) Überblick

Mit dem *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung* führt man die Berechnung von bestimmten Integralen auf das Auffinden von Stammfunktionen zurück. Für eine Stammfunktion von $f(x)$ schreibt man auch *(11.4)*

$$\int f(x)\,dx$$

und nennt diesen Ausdruck ein *unbestimmtes Integral.* *(12.7)*

In diesem Kapitel werden die technischen Grundlagen zum Integrieren geliefert und an Beispielen illustriert. *(12.4), (12.5)* *(12.6)*

(12.2) Rekapitulation

Wir wiederholen die wichtigsten Ergebnisse von Kapitel 11. Dabei bezeichnet I weiterhin ein beliebiges Intervall.

- Die Funktion F heisst eine Stammfunktion von $f : I \to \mathbb{R}$, wenn $F'(x) = f(x)$ ist, für alle $x \in I$.
- Zwei Stammfunktionen von $f : I \to \mathbb{R}$ unterscheiden sich nur um eine additive Konstante.
- Es gilt der *Hauptsatz*: Wenn F eine Stammfunktion von f ist, dann ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \ .$$

(12.3) Diskussion einiger Stammfunktionen

Der einfachste Weg, Stammfunktionen zu erhalten, besteht offenbar darin, eine Liste der abgeleiteten Funktionen in der umgekehrten Richtung zu lesen. Wir illustrieren diesen Sachverhalt anhand eines Auszugs aus der Tabelle (5.3):

Funktion $\longrightarrow$	Ableitung
Stammfunktion $\longleftarrow$	Funktion
x	1
x^2	$2x$
x^r	rx^{r-1} $(r \in \mathbb{R})$
e^x	e^x
$\ln x$	$1/x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x$

Erste elementare Bemerkungen:

Wie ist das jetzt mit dem Logarithmus, rauf und runter?

(12.4) Eine erste Liste von Stammfunktionen

Aufgrund der verschiedenen in (12.3) gemachten Bemerkungen können wir die oben aufgestellte Tabelle für den praktischen Gebrauch verbessern:

Funktion $f(x)$	Eine Stammfunktion $F(x)$
a	ax
$x^r \quad (r \neq -1)$	$\dfrac{x^{r+1}}{r+1}$
$\dfrac{1}{x}$	$\ln\|x\|$
e^x	e^x
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$

Wichtig ist die Tatsache, dass eine Stammfunktion nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist. Man schreibt deshalb zur Verdeutlichung oft

$$F(x) + C, \quad \text{also z.B.} \quad \ln|x| + C \quad \text{usw.}$$

In der obigen Tabelle wurde darauf verzichtet. In manchen Anwendungen darf diese sogenannte *Integrationskonstante* keinesfalls vergessen werden, z.B. bei Differentialgleichungen (Kapitel 16), in andern ist sie nicht nötig, z.B. bei der Anwendung des Hauptsatzes (11.4), da dort F eine beliebige Stammfunktion sein kann:

(12.5) Integrationsregeln

Die Tabelle in (12.4) ist durch Umkehrung der Ableitungsformeln (5.3) zustande gekommen. Auch die Ableitungsregeln von (5.2) liefern anders interpretiert Integrationsregeln. Da die Ableitung einer Summe gleich der Summe der Ableitungen ist, ist die Stammfunktion einer Summe gleich der Summe der Stammfunktionen. Im einzelnen erhalten wir auf diese Weise:

Es seien $F(x)$ bzw. $G(x)$ Stammfunktionen von $f(x)$ bzw. von $g(x)$. Dann gilt

(1) $F(x) + G(x)$ ist eine Stammfunktion von $f(x) + g(x)$.

(2) $F(x) - G(x)$ ist eine Stammfunktion von $f(x) - g(x)$.

(3) $cF(x)$ ist eine Stammfunktion von $cf(x)$.

Wendet man diese Regeln auf die Berechnung von Integralen mittels des Hauptsatzes an, so erhält man die schon in (10.8) erwähnten Formeln

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$
$$\int_a^b \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx\ .$$

Als *Warnung* sei noch erwähnt, dass es keine entsprechende Formel für das Produkt

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

gibt.

(12.6) Beispiele, variiert vom Storrer

Gesucht ist $\displaystyle\int_1^2 (3x^4 + 3x^2 - 2)\,dx$.

Berechne $\int_1^2 \left(\sqrt{t} + \frac{2}{t^4}\right) dt$.

Gesucht ist der Inhalt der Fläche unter der durch $y = \dfrac{1}{x}$ im Intervall $[1, 2]$ gegebenen Kurve. Was passiert, wenn wir $[1, 2]$ durch $[-2, -1]$ ersetzen (Formel und Bild)?

Beispiel aus der Physik: Ausdehnungsarbeit eines Gases

(12.8) Integration als Umkehrung der Differentiation

Ist der Integrand schon selbst als Ableitung einer Funktion gegeben, so lässt sich das bestimmte Integral mit Hilfe des Hauptsatzes sofort angeben, denn $f(x)$ ist sicher eine Stammfunktion von $f'(x)$:

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)\ .$$

Beispiel

Wichtig:

1. Lesen Sie jetzt das komplette Kapitel im Storrer I selber durch.
2. Lösen Sie danach mindestens 5 Aufgaben hinten im Kapitel und vergleichen Sie mit den Lösungen am Schluss des Buches. Bei Bedarf lösen Sie mehr Aufgaben.
3. Gehen Sie in die Übungsstunde. Drucken Sie das Übungsblatt dazu *vorher* aus, lesen Sie *vorher* die Aufgaben durch und machen sich erste Gedanken dazu (zum Beispiel, wie man sie lösen könnte).
4. Dann lösen Sie das Übungsblatt: zuerst immer selber probieren, falls nicht geht: Tipp von Mitstudi benutzen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi anschauen, 1 Stunde warten, versuchen, aus dem Kopf heraus wieder zu lösen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi abschreiben (und verstehen - also sollte man insbesondere keine Fehler abschreiben!).
5. Lösen Sie die entsprechenden Prüfungsaufgaben im Archiv.