11. DER HAUPTSATZ DER DIFFERENTIAL- UND INTEGRALRECHNUNG

engl: Fundamental theorem of calculus

(11.2) Das bestimmte Integral als Funktion der oberen Grenze

Hier und im folgenden bezeichnet I ein beliebiges (offenes, abgeschlossenes etc.) Intervall. Wir betrachten eine stetige Funktion

$$f : I \to \mathbb{R}$$

und wählen ein festes $a \in I$. Für jedes $x \in I$ ist dann das bestimmte Integral

$$\int_a^x f(t)\,dt$$

im Sinne von (10.2) definiert. Auf diese Weise erhalten wir eine neue Funktion

$$\boxed{\Phi : I \to \mathbb{R}\ , \quad \Phi(x) := \int_a^x f(t)\,dt\ .}$$

Wenn $f(x) \geq 0$ ist, so hat $\Phi(x)$ eine einfache geometrische Bedeutung als Inhalt des schraffierten Flächenstücks:

Dies gilt jedenfalls für $x > a$; gemäss (10.8) ist $\Phi(a) = 0$ ("geschrumpfter" Flächeninhalt), und für $x < a$ ist $\Phi(x)$ der negative Flächeninhalt.

Beispiel: In (10.7) haben wir gesehen, dass gilt:

$$\int_0^b x^2\,dx = \frac{b^3}{3}\ .$$

Nach einer Umbezeichnung erhalten wir in diesem speziellen Fall eine Formel für die Funktion Φ, nämlich

$$\Phi(x) = \int_0^x t^2\,dt = \frac{x^3}{3}\ .$$

Wieder allgemein: Für die so definierte Funktion $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ gilt nun die folgende äusserst wichtige Tatsache:

Tatsache (I):	Φ ist auf I differenzierbar und es ist $\Phi'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$.

Das bisher einzige Beispiel eines Integrals, für welches wir einen formelmässigen Ausdruck kennen, ist oben erwähnt. Hier ist $f(x) = x^2$, $\Phi(x) = x^3/3$, und in der Tat ist hier $\Phi'(x) = f(x)$. Dies bestätigt die Tatsache (I).

Wir geben jetzt eine anschauliche Begründung für die Tatsache (I):

(11.3) Stammfunktionen

Wir knüpfen an die Tatsache (I) von (11.2) an und führen einen neuen wichtigen Begriff ein:

Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Unter einer *Stammfunktion* (engl antiderivative, primitive function, primitive integral or indefinite integral) von f versteht man eine Funktion F, für die gilt:

$$F'(x) = f(x) \quad \text{für alle} \quad x \in I \ .$$

Die Tatsache (I) kann nun auch so formuliert werden: Wenn f stetig ist, so ist die durch

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

gegebene Funktion Φ eine Stammfunktion von f.

Somit hat jede stetige Funktion f (mindestens) eine Stammfunktion, nämlich Φ. Da aber die direkte Berechnung eines bestimmten Integrals i.a. grosse Mühe macht, ist dies zunächst nur von theoretischem Interesse.

Der entscheidende Punkt ist nun aber der, dass man das Problem auch umgekehrt betrachten kann. In vielen Fällen kann man nämlich ganz direkt eine Stammfunktion angeben, indem man einfach die Ableitungsregeln umkehrt. So ist z.B. $F(x) = \sin x$ eine Stammfunktion von $f(x) = \cos x$ (denn $F'(x) = (\sin x)' = \cos x = f(x)$), $G(x) = x^2$ eine Stammfunktion von $g(x) = 2x$ (denn $G'(x) = (x^2)' = 2x = g(x)$). Wir üben dies gleich mal zusammen:

Diesen Sachverhalt kann man jetzt verwenden, um bestimmte Integrale unter Verwendung von auf irgendeine Weise direkt gefundenen Stammfunktionen zu berechnen: Wir werden die Überlegungen anhand des ersten Beispiels weiterführen. Aus der allgemeinen Theorie wissen wir, dass

$$\Phi(x) = \int_a^x \cos t \, dt$$

eine Stammfunktion von $f(x) = \cos x$ ist. Anderseits haben wir direkt eingesehen, dass

$$F(x) = \sin x$$

ebenfalls eine Stammfunktion von $\cos x$ ist. Wenn wir nun schliessen dürften, dass diese beiden Stammfunktionen Φ und F gleich wären, dass also

$$\int_a^x \cos t \, dt = \sin x \quad \text{oder speziell} \quad \int_a^b \cos t \, dt = \sin b$$

wäre, dann hätten wir ein — bisher so unzugängliches — Integral auf einfachste Weise berechnet. Leider ist diese Überlegung nicht ganz richtig (doch trösten Sie sich: Es ist noch nicht alles verloren!).

Der Grund dafür, dass die eben durchgeführte Betrachtung nicht korrekt ist, liegt darin, dass eine stetige Funktion stets unendlich viele Stammfunktionen hat. Es gilt nämlich:

> Tatsache (II): Wenn $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist, dann ist auch $F(x)+C$ für jede reelle Zahl C eine Stammfunktion von $f(x)$.

Dies folgt einfach daraus, dass jede konstante Funktion die Ableitung 0 hat. Deshalb ist in der Tat $(F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$.

Von dieser Feststellung gilt aber auch die Umkehrung:

> Tatsache (III): Es seien $F_1(x)$ und $F_2(x)$ Stammfunktionen von $f(x)$. Dann gilt $F_1(x) - F_2(x) = C$ (für alle x) für eine geeignete Konstante C, oder, anders geschrieben: $F_1(x) = F_2(x) + C$.

Beweis:

Nun betrachten wir unser Beispiel von vorher nochmals mit neuem Mut. Wir dürfen zwar nicht schliessen, dass die beiden Stammfunktionen $\Phi(x)$ und $\sin x$ von $f(x) = \cos x$ gleich sind. Wohl aber gilt, dass sie sich bloss um eine Konstante unterscheiden. Es gibt also eine Zahl C mit

$$\Phi(x) = \int_a^x \cos t \, dt = \sin x + C \ .$$

Wie lässt sich dieses C nun bestimmen? Setzen wir $x = a$, so wird

$$\Phi(a) = \int_a^a \cos t \, dt = 0 = \sin a + C$$

und wir finden

$$C = -\sin a \ .$$

Für alle x gilt also

$$\int_a^x \cos t \, dt = \sin x - \sin a$$

und speziell (mit $x = b$)

$$\int_a^b \cos t \, dt = \sin b - \sin a \ .$$

Noch spezieller haben wir zum Beispiel das Resultat

$$\int_0^{\pi/2} \cos t \, dt = \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 \ .$$

Dies ist nun wirklich ein Erfolg! Wir haben ein bestimmtes Integral, dessen Definition (mit Riemannschen Summen) so kompliziert war, auf ganz einfache Weise berechnen können.

Interpretieren wir die letzte Formel geometrisch, so sehen wir, dass der Inhalt der schraffierten Fläche unter der Cosinus-Kurve $= 1$ ist!

Probieren wir das Verfahren gleich nochmals aus: Zu berechnen sei

$$\int_a^b t^3 \, dt \ .$$

(11.4) Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Das folgende Resultat ist für die Berechnung von Integralen äusserst wichtig.

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

Die Funktion f sei auf dem Intervall I definiert und stetig. Ferner sei F eine beliebige Stammfunktion von f. Dann gilt für alle $a, b \in I$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\ .$$

Der Beweis dieses Satzes folgt den bereits angestellten Überlegungen: Nach der "Tatsache (I)" von (11.2) ist $\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ eine Stammfunktion von $f(x)$. Wegen der "Tatsache (III)" von (11.3) unterscheiden sich also Φ und F nur um eine Konstante C:

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + C \quad \text{für alle} \quad x \in I\ .$$

Da $\Phi(a) = 0$ ist, gilt $F(a) + C = 0$, d.h. $C = -F(a)$. Für $x = b$ erhält man

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)\ .$$

Abgesehen von der (unwesentlichen) Bezeichnung der Integrationsvariablen ist dies gerade die Behauptung des Satzes. Es sei noch betont, dass die Formel des Hauptsatzes sowohl für $a < b$ als auch für $a > b$ (und trivialerweise für $a = b$) gilt.

Beachten Sie, dass der Hauptsatz eine enge Beziehung zwischen der Ableitung und dem Integral herstellt, eine Beziehung, die a priori nicht auf der Hand liegt (deshalb engl *anti*derivative).

Für die oft vorkommende Differenz $F(b) - F(a)$ gebraucht man oft die Abkürzung

$$\boxed{F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b \text{ oder auch } \Big[F(x)\Big]_a^b\ .}$$

Beispielsweise ist

$$x^2\Big|_a^b = b^2 - a^2\ .$$

Im nächsten Kapitel werden wir den Hauptsatz systematisch anwenden. Zum Schluss geben wir noch ein ganz einfaches Beispiel, in welchem zudem eine Bezeichnung erläutert wird. Wir betrachten die konstante Funktion $f(x) = 1$. Statt $\int_a^b 1\,dx$ schreibt man einfach $\int_a^b dx$. Weil $F(x) = x$ offensichtlich eine Stammfunktion von $f(x)$ ist, erhalten wir

$$\int_a^b dx = x\Big|_a^b = b - a\,.$$

Geometrisch ist dies der Flächeninhalt des Rechtecks mit Höhe 1 über dem Intervall mit den Grenzen a und b (falls $a < b$ ist; andernfalls ist $b - a < 0$, und wir bekommen den negativen Flächeninhalt).

Wichtig:

1. Lesen Sie jetzt das komplette Kapitel im Storrer I selber durch.
2. Lösen Sie danach mindestens 5 Aufgaben hinten im Kapitel und vergleichen Sie mit den Lösungen am Schluss des Buches. Bei Bedarf lösen Sie mehr Aufgaben.
3. Gehen Sie in die Übungsstunde. Drucken Sie das Übungsblatt dazu *vorher* aus, lesen Sie *vorher* die Aufgaben durch und machen sich erste Gedanken dazu (zum Beispiel, wie man sie lösen könnte).
4. Dann lösen Sie das Übungsblatt: zuerst immer selber probieren, falls nicht geht: Tipp von Mitstudi benutzen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi anschauen, 1 Stunde warten, versuchen, aus dem Kopf heraus wieder zu lösen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi abschreiben (und verstehen - also sollte man insbesondere keine Fehler abschreiben!).
5. Lösen Sie die entsprechenden Prüfungsaufgaben im Archiv.