7. LINEARISIERUNG UND DAS DIFFERENTIAL

$\boxed{\text{(7.2) Die Tangentengleichung}}$

(7.3) Linearisierung einer Funktion

Ein Blick auf die obige Skizze zeigt, dass die lineare Funktion

(1) $$\boxed{p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}$$

in der Nähe von x_0 eine gute Approximation der gegebenen Funktion $f(x)$ ist. Die Funktionen f und p haben nämlich an der Stelle x_0 denselben Funktionswert und dieselbe Ableitung:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= p(x_0)\ , \\ f'(x_0) &= p'(x_0)\ . \end{aligned}$$

Anders ausgedrückt: An der Stelle x_0 stimmen die 0. und die 1. Ableitung von f und p überein. (Unter der 0. Ableitung versteht man bekanntlich die Funktion selbst, siehe (4.5).)

In der Nähe von x_0 gilt also:

(2) $$\boxed{f(x) \approx p(x)}$$

(das Zeichen $\approx$ bedeutet wie $\doteq$ “ungefähr gleich”).

Nun ist eine lineare Funktion wie p natürlich einfacher zu handhaben als die beliebige Funktion f. Man macht sich dies manchmal zunutze, indem man $f(x)$ durch $p(x)$ ersetzt. Man nennt dann p eine “*lineare Ersatzfunktion*” oder man sagt, man habe f “*linearisiert*”. Die folgende Tabelle enthält einige Beispiele:

$f(x)$	$f'(x)$	x_0	$f(x_0)$	$f'(x_0)$	$p(x)$
e^x	e^x	0	1	1	$1+x$
$\sqrt{1+x}$	$\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$1+\frac{1}{2}x$
$\sqrt{1+x}$	$\frac{1}{2\sqrt{1+x}}$	3	2	$\frac{1}{4}$	$2+\frac{1}{4}(x-3)$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$	0	1	0	1

Ein weiteres, wichtiges Beispiel für die Praxis (nicht im Storrer):

Bilder zur Situation 1-5:

Beispiele und Hinweise

1. Setzen wir im 3. Beispiel der Tabelle $x = 3.01$ (nahe bei $x_0 = 3$), so finden wir

$$f(x) = \sqrt{4.01} = 2.002498\ldots\ ,$$
$$p(x) = 2 + \frac{1}{4} \cdot 0.01 = 2.0025\ .$$

   Die Approximation ist, wie man sieht, sehr gut. ⊠

2. Beachten Sie, dass die lineare Ersatzfunktion von der gewählten Stelle x_0 abhängt. Im 2. und 3. Beispiel aus der Tabelle linearisieren wir beide Male die Funktion $f(x) = \sqrt{1+x}$, verwenden aber zwei verschiedene Werte von x_0. Für $x_0 = 0$ erhalten wir $p(x) = \frac{1}{2}x + 1$, für $x_0 = 3$ aber $p(x) = 2 + \frac{1}{4}(x-3) = \frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$.
3. Wie das 4. Beispiel aus der Tabelle zeigt, kann es ohne weiteres vorkommen, dass $p(x)$ eine konstante Funktion ist (dies tritt genau dann ein, wenn $f'(x_0) = 0$ ist).

In Kapitel 19 werden wir sehen, dass man als Ersatzfunktionen nicht nur lineare Funktionen, sondern auch Polynome n–ten Grades nehmen kann, dazu eine kleine Illustration **(Bild Storrer Seite 295)**:

Die Konsequenzen von Beispiel 5) für Ihr Bankbüechli und alles was sonst noch exponentiell (stetige Zeit) oder geometrisch (diskrete Zeit) wächst:

Verdoppelungs- und Halbwertszeiten:

Weitere Betrachtungen zu *mehreren* Halbwerts- und Verdoppelungszeiten (hintereinander):

(7.4) Das Differential

In diesem Abschnitt führen wir vor allem einige neue Bezeichnungen ein. Zur in (7.3) behandelten Idee der Linearisierung kommt eigentlich nichts Wesentliches hinzu. Dort haben wir gesehen, dass gilt

$$f(x) \approx p(x)$$

d.h.

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \ .$$

Wir schreiben dies nun etwas anders, nämlich in der Form

$$f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0) \ . \tag{3}$$

Wenn wir die von früher bekannten Abkürzungen $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ und $\Delta x = x - x_0$ verwenden, so hat diese Beziehung die Form

$$\Delta f \approx f'(x_0)\Delta x \ . \tag{4}$$

Schliesslich führen wir noch eine weitere Bezeichnung ein: Wir setzen

$$\boxed{df = f'(x_0)\Delta x \ ,} \tag{5}$$

und aus (4) wird

$$\boxed{\Delta f \approx df \ .} \tag{6}$$

Beachten Sie, dass (3), (4) und (6) genau dasselbe aussagen, wenn auch mit unterschiedlichen Bezeichnungen. In der folgenden Figur sind die Grössen Δf und df dargestellt.

Sie haben folgende Bedeutung:

- Δf gibt den Zuwachs der Funktion f wieder, wenn man von x_0 nach $x = x_0 + \Delta x$ geht.
- *df* stellt den entsprechenden Zuwachs der linearen Ersatzfunktion p (deren Graph die Tangente ist) dar.

Die Grösse *df* heisst das *Differential* von f. Sie hängt sowohl von der Stelle x_0 als auch vom Zuwachs Δx ab und müsste deshalb eigentlich genauer mit $df(x_0, \Delta x)$ bezeichnet werden, was aber unüblich ist (vgl. jedoch das folgende Beispiel 1.).

Aus formalen Gründen pflegt man auch dx statt Δx zu schreiben. Auf diese Weise erhält man die folgende Formel für das Differential:

$$\boxed{df = f'(x_0)\, dx\ .} \tag{7}$$

Hierbei ist dx nicht etwa eine "unendlich kleine Grösse" (was immer das sein soll), sondern eine beliebige (wenn auch meist dem Betrage nach kleine) Zahl.

<u>Beispiele</u>

1. Es sei $f(x) = \sqrt{x^2+3}$. Wegen $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3}}$ ist $df = \dfrac{x_0}{\sqrt{x_0^2+3}}\, dx$. Setzen wir speziell $x_0 = 1$, so erhalten wir

$$df = \frac{1}{2}\, dx\ .$$

Wählen wir nun auch noch einen Wert für dx, z.B. $dx = 0.1$, so folgt schliesslich

$$df = 0.05\ ,$$

oder (genauer, aber gewöhnlich nicht so geschrieben) $df(1,\, 0.1) = 0.05$. ⊠

3.

(7.5) Anwendung auf die Fehlerfortpflanzung

Beispiele

Wichtig:

1. Lesen Sie jetzt das komplette Kapitel im Storrer I selber durch.
2. Lösen Sie danach mindestens 5 Aufgaben hinten im Kapitel und vergleichen Sie mit den Lösungen am Schluss des Buches. Bei Bedarf lösen Sie mehr Aufgaben.
3. Gehen Sie in die Übungsstunde. Drucken Sie das Übungsblatt dazu *vorher* aus, lesen Sie *vorher* die Aufgaben durch und machen sich erste Gedanken dazu (zum Beispiel, wie man sie lösen könnte).
4. Dann lösen Sie das Übungsblatt: zuerst immer selber probieren, falls nicht geht: Tipp von Mitstudi benutzen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi anschauen, 1 Stunde warten, versuchen, aus dem Kopf heraus wieder zu lösen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi abschreiben (und verstehen - also sollte man insbesondere keine Fehler abschreiben!).
5. Lösen Sie die entsprechenden Prüfungsaufgaben im Archiv.