6. ANWENDUNGEN DER ABLEITUNG

(6.2) Einige Fachausdrücke

a) Intervalle

Intervalle sind spezielle Teilmengen der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen. Wenn a und b $(a < b)$ reelle Zahlen sind, so benutzt man folgende Bezeichnungen:

$$\begin{aligned}
(a,b) &= \{x \mid a < x < b\} && : \textit{offenes}\ \text{Intervall},\\
[a,b] &= \{x \mid a \le x \le b\} && : \textit{abgeschlossenes}\ \text{Intervall},\\
\left.\begin{aligned}(a,b] &= \{x \mid a < x \le b\}\\ [a,b) &= \{x \mid a \le x < b\}\end{aligned}\right\} & && : \textit{halboffene}\ \text{Intervalle}.
\end{aligned}$$

Ganz ähnlich schreibt man auch etwa

$$\begin{aligned}
(a,\infty) &= \{x \mid x > a\},\\
(-\infty,b] &= \{x \mid x \le b\} \qquad \text{usw.}
\end{aligned}$$

In manchen Büchern gebraucht man für das offene Intervall auch das Zeichen $]a,b[$.

b) ε–Umgebungen

ε–Umgebungen sind spezielle offene Intervalle. Dabei ist ε eine positive Zahl, die in den Anwendungen gewöhnlich klein ist. Solche ε haben wir schon früher angetroffen (3.6.b), (4.6.d). Es sei nun $x_0 \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon \in \mathbb{R},\ \varepsilon > 0$. Dann setzt man

$$U_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) = \{x \mid x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon\}\ .$$

$x_0 - \varepsilon \qquad x_0 \qquad x_0 + \varepsilon$

Dieses Intervall heisst die ε–*Umgebung* von x_0. $U_\varepsilon(x_0)$ besteht somit aus allen Punkten, deren Abstand von x_0 kleiner als ε ist.

c) Randpunkte und innere Punkte

Ein halboffenes oder abgeschlossenes Intervall hat *Randpunkte*:

$$\begin{array}{ll} [a,b): & \text{Randpunkt } \ a, \\ (a,b]: & \text{Randpunkt } \ b, \\ [a,b]: & \text{Randpunkte } a,b\ . \end{array}$$

Die Punkte eines Intervalls I, welche keine Randpunkte sind, heissen *innere Punkte* von I. Offenbar ist x_0 genau dann ein innerer Punkt von I, wenn es eine (wenn vielleicht auch kleine) ε–Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ gibt, welche ganz in I liegt.

d) Wachsende und fallende Funktionen

Es sei f eine Funktion mit Definitionsbereich $D(f)$. Diese Funktion f heisst *wachsend*, wenn gilt: $f(x_1) < f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in D(f)$ mit $x_1 < x_2$. Entsprechend heisst f *fallend*, wenn gilt: $f(x_1) > f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in D(f)$ mit $x_1 < x_2$.

Bemerkung

In den obigen Fällen sagt man manchmal auch, f sei streng monoton wachsend (bzw. fallend). Monoton wachsend (ohne "streng") heisst dann "$f(x_1) \leq f(x_2)$ für $x_1 < x_2$"; monoton fallend analog. Schliesslich heisst f monoton, wenn f entweder monoton wachsend oder monoton fallend ist. Wir werden uns hier an den zuerst angegebenen einfacheren Sprachgebrauch halten.

(6.3) Wachstumsverhalten

b) Ableitung und Wachstum

Die Funktion f sei auf dem Intervall I definiert (und differenzierbar). Das Intervall I kann offen, abgeschlossen etc. sein; auch der Fall $I = \mathbb{R}$ ist möglich. Das Intervall I muss aber nicht unbedingt der "natürliche Definitionsbereich" sein (d.h. die grösste Teilmenge von $\mathbb{R}$, auf der f überhaupt definiert werden kann). Gerade im Zusammenhang mit den hier besprochenen Fragen wird man sich beispielsweise auf ein Intervall beschränken, in welchem die Ableitung stets positiv ist.

Wenn nun die Ableitung $f'(x) > 0$ ist, für alle x aus I, dann ist im anschaulichen Bild die Tangentensteigung in jedem Punkt des Graphen positiv, und dies bedeutet, dass die Funktion auf I wächst: Aus $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) < f(x_2)$. Entsprechendes gilt für den Fall $f'(x) < 0$, wo die Funktion fällt.

Zusammenfassend finden wir:

(1) $f'(x) > 0$ für alle $x \in I \Longrightarrow f$ ist auf I wachsend.

(2) $f'(x) < 0$ für alle $x \in I \Longrightarrow f$ ist auf I fallend.

Wie man sieht, kann die "Krümmung des Graphen" unterschiedlich sein, näheres dazu in (6.4).

<u>Beispiel</u>

Es sei $f(x) = e^{cx}$ und somit $f'(x) = c \cdot e^{cx}$. Weil e^{cx} stets positiv ist, gilt

(i) Für $c > 0$ ist $f'(x) > 0 : f$ ist auf $\mathbb{R}$ wachsend.

(ii) Für $c < 0$ ist $f'(x) < 0 : f$ ist auf $\mathbb{R}$ fallend.

c) <u>Ableitung und konstante Funktionen</u>

Wichtig ist auch der Fall, wo $f'(x) = 0$ ist, für alle x aus dem Intervall I. Von der geometrischen Anschauung her ist es dann einleuchtend, dass f eine konstante Funktion sein muss, denn die Tangente ist überall horizontal. In Zeichen:

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow f \quad \text{konstant.}$$

Im Gegensatz zu b) (vgl. den dortigen Hinweis) gilt hier auch die Umkehrung: Eine der einfachsten Ableitungsregeln (5.3) besagt, dass die Ableitung einer konstanten Funktion immer Null ist. Also haben wir die Regel

$$\boxed{(3) \quad f'(x) = 0 \;\text{ für alle }\; x \in I \Longleftrightarrow f \;\text{ konstant.}}$$

d) <u>Ein qualitatives Beispiel</u>

Illustrieren wir das Ganze noch an einem qualitativen Beispiel. Es wird kein Anspruch auf zahlenmässige Genauigkeit erhoben!

Von a nach b steigt die Funktion zuerst gleichförmig, die Ableitung ist also zunächst konstant, wird dann aber im Punkt b gleich 0 (horizontale Tangente!). Hierauf fällt die Funktion bis c und ist von dort an horizontal. Zwischen b und c muss die Ableitung somit negativ sein, zwischen c und d aber gleich 0. Hierauf folgt ein Anstieg von d nach e (positive Ableitung), ein "stationärer Punkt" in e (Ableitung $= 0$) und schliesslich ein Abfall (negative Ableitung), wobei die Ableitung von g an konstant ist (der Graph ist eine fallende Gerade!).

(6.4) Die Bedeutung der zweiten Ableitung

Wir setzen hier nicht nur voraus, dass $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist, sondern auch, dass auf I die zweite Ableitung f'' existiert.

Da f'' die erste Ableitung von f' ist, können wir die Betrachtungen von (6.3) auf f' und f'' (statt wie dort auf f und f') anwenden. Wenn auf dem ganzen Intervall I die zweite Ableitung $f''(x) < 0$ ist, so fällt $f'(x)$ auf ganz I, d.h., die Steigung von $f(x)$ nimmt (mit wachsendem x) ab:

Anschaulich heisst dies, dass der Graph von f eine *Rechtskurve* beschreibt. (Man sagt manchmal auch, f sei konkav nach unten oder konvex nach oben, aber diese Bezeichnungen sind etwas verwirrend.) Ganz entsprechend behandelt man den Fall $f''(x) > 0$. Somit finden wir:

(4) $f''(x) < 0$ auf $I \Longrightarrow$ Der Graph von f beschreibt auf I eine Rechtskurve.

(5) $f''(x) > 0$ auf $I \Longrightarrow$ Der Graph von f beschreibt auf I eine Linkskurve.

In den folgenden Skizzen sind die Beziehungen (4) und (5) mit (1) und (2) zusammengefasst. Sie zeigen die verschiedenen Kombinationen von Wachstums- und Krümmungsverhalten.

Von einiger Bedeutung ist schliesslich noch der folgende Begriff: Wenn der Graph von f an der Stelle x_0 von einer Links- zu einer Rechtskurve (oder umgekehrt) übergeht, dann spricht man von einem *Wendepunkt* (engl inflection point). Er ist dadurch charakterisiert, dass $f''(x_0) = 0$ ist und dass f'' in x_0 das Vorzeichen wechselt.

Die Bedingung $f''(x_0) = 0$ allein genügt nicht für einen Wendepunkt. Nimmt man z.B. $f(x) = x^4$, so ist $f''(0) = 0$, aber es liegt kein Wendepunkt vor, denn f'' wechselt in 0 das Vorzeichen nicht. Der Graph beschreibt durchgehend eine Linkskurve.

Ein Wendepunkt mit horizontaler Tangente (also zusätzlich mit $f'(x_0) = 0$) heisst *Terrassenpunkt* (engl saddle point). So hat beispielsweise die Funktion $f(x) = x^3$ an der Stelle 0 einen solchen Terrassenpunkt.

Wir fassen auch diese beiden Aussagen noch zusammen.

(6) f hat in x_0 einen Wendepunkt $\iff$
$f''(x_0) = 0$ und f'' wechselt in x_0 das Vorzeichen.

(7) f hat in x_0 einen Terrassenpunkt $\iff$
$f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ und f'' wechselt in x_0 das Vorzeichen.

Beispiel

Analysieren Sie die Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ im Hinblick auf die Resultate in (6.3) und (6.4):

(6.5) Extrema

a) Einleitung

Eine sehr bekannte Anwendung der Differentialrechnung ist die Lösung von Extremalaufgaben (das Auffinden von Maxima und Minima einer Funktion). Das Vorgehen ist Ihnen vom Gymnasialunterricht her vertraut: Man setzt die erste Ableitung gleich Null und prüft allenfalls mit der zweiten Ableitung nach, ob ein Maximum oder ein Minimum vorliegt. Dieses einfache Rezept wollen wir hier etwas genauer ansehen. Zuerst präzisieren wir den Begriff des Extremums.

b) Absolute und relative Extrema

Es sei f eine auf einem gewissen Definitionsbereich $D(f)$ gegebene Funktion. Unter dem *absoluten Maximum* von f (auf $D(f)$) versteht man den grössten Funktionswert in bezug auf den gegebenen Definitionsbereich. Das *absolute Minimum* ist natürlich entsprechend definiert. Maxima und Minima fasst man unter dem Begriff *Extrema* zusammen. Etwas formeller:

Es sei $f : D(f) \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Man sagt, f habe ein *absolutes Maximum* an der Stelle x_0 oder $f(x_0)$ sei ein absolutes Maximum von f, wenn gilt

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \text{für alle} \quad x \in D(f) \ .$$

Das *absolute Minimum* wird entsprechend definiert (ersetze $\geq$ durch $\leq$).

Neben den absoluten Extrema sind auch die relativen Extrema von Bedeutung. Die folgende Skizze erläutert die Begriffe anschaulich.

Um auch hier eine exakte Definition geben zu können, ist es zweckmässig, die Redewendung “in der Nähe von x_0” durch den Begriff der ε–Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ des Punktes x_0 zu ersetzen (vgl. (6.2.b)). Die präzise Formulierung lautet dann so:

Die Funktion $f : D(f) \to \mathbb{R}$ hat an der Stelle $x_0 \in D(f)$ ein *relatives Maximum*, wenn es eine ε–Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ gibt, so dass gilt

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \text{für alle} \quad x \in D(f) \cap U_\varepsilon(x_0) \ .$$

Das *relative Minimum* wird entsprechend definiert.

c) Zur Existenz von Extrema

Man ist oft daran interessiert, die Extrema (vor allem die absoluten Extrema) einer gegebenen Funktion $f : D(f) \to \mathbb{R}$ aufzusuchen. Es kann dabei durchaus geschehen, dass man nicht fündig wird, denn eine Funktion braucht nicht unbedingt Extrema zu haben, wir analysieren dazu die folgenden Beispiele:

1) $f : (0, 1] \to \mathbb{R},\ f(x) = \dfrac{1}{x}\,.$

2) $f : (0, 1) \to \mathbb{R},\ f(x) = x\,.$

d) Wie findet man die Extremalstellen?

Bitte lesen Sie diese Stellen im Storrer mit allen Details genau durch; wir besprechen in der Vorlesung lediglich kurz die Theorie und üben das Repetierte gleich anhand von Beispielen.

- absolutes Maximum ist stets auch ein relatives Maximum, suchen also einfach alle relativen Maxima - analog Minima
- Aus $f'(x_0) = 0$ darf nicht ohne weiteres geschlossen werden, dass f in x_0 ein relatives Extremum hat
- Es kann auch Extremalstellen geben, in welchen die Ableitung nicht Null ist

- *mögliche* Kandidaten für relative Extremalstellen:

(i) Randpunkte - **mühsam, wird oft vergessen!**

Wenn der Definitionsbereich $D(f)$ ein halboffenes oder abgeschlossenes Intervall ist, dann hat er Randpunkte. Es kann vorkommen, dass die Funktion ausgerechnet in den Randpunkten ein absolutes oder relatives Extremum hat:

Diese Randpunkte werden mit den Methoden der Differentialrechnung im allgemeinen nicht erfasst (die Ableitung der Funktion f ist in einem Randpunkt i.a. nicht gleich Null), so dass sie, falls vorhanden, stets separat zu berücksichtigen sind.

(ii) Innere Punkte, in denen f differenzierbar ist - **der schöne Fall**

Nachdem die Randpunkte besprochen sind, betrachten wir nun einen inneren Punkt x_0 des Definitionsbereichs $D(f)$ und setzen auch noch voraus, dass f in x_0 differenzierbar sei. Dann gilt:

Es sei x_0 ein innerer Punkt von $D(f)$ und f sei in x_0 differenzierbar. Wenn f an der Stelle x_0 ein relatives Extremum hat, dann ist $f'(x_0) = 0$.

Dieses Ergebnis ist anschaulich klar: Wenn z.B. ein relatives Maximum vorliegt, dann steigt die Tangente links von x_0 und sie fällt rechts von dieser Stelle. Die (nach Voraussetzung existierende) Tangente in x_0 muss deshalb horizontal sein: Es ist $f'(x_0) = 0$.

Obwohl wir in f) darauf zurückkommen werden, sei jetzt schon betont, dass die Umkehrung der obigen Tatsache nicht gilt: Aus $f'(x_0) = 0$ braucht noch nicht zu folgen, dass f in x_0 ein relatives Extremum hat.

(iii) Innere Punkte, in denen f nicht differenzierbar ist - **das merkt man!**

Wenn f in x_0 nicht differenzierbar ist, so ist die Bedingung $f'(x_0) = 0$ sinnlos. Es kann aber vorkommen, dass ein Extremum gerade dort auftritt, wo f nicht differenzierbar ist. So hat die Funktion $f(x) = |x|$ ihr relatives (und absolutes) Minimum an der Stelle $x = 0$, wo sie nicht differenzierbar ist!

e) Zusammenfassung

Die oben gemachten Überlegungen lassen sich (in geänderter Reihenfolge) wie folgt zusammenfassen:

Ein *relatives Extremum* (wenn es überhaupt existiert) muss an einer der folgenden Stellen auftreten:

1. Innere Punkte x_0 des Definitionsbereichs mit $f'(x_0) = 0$,
2. Randpunkte des Definitionsbereichs (falls vorhanden),
3. Stellen, wo f nicht differenzierbar ist (falls vorhanden).

Die absoluten Extrema (falls sie existieren) findet man unter den relativen Extrema. Das grösste relative Maximum ist dann das absolute Maximum, das kleinste relative Minimum ist das absolute Minimum.

f) Charakterisierung der Extrema

Wenn die Funktion f zweimal differenzierbar ist, so kann das folgende Kriterium helfen:

Sei x_0 eine Stelle mit $f'(x_0) = 0$.

- Ist $f''(x_0) < 0$, so hat f in x_0 ein relatives Maximum.
- Ist $f''(x_0) > 0$, so hat f in x_0 ein relatives Minimum.

Wenn aber $f''(x_0) = 0$ ist, so kann man nichts aussagen, und es müssen andere Überlegungen gemacht werden, wie die folgenden Beispiele zeigen: In den nachstehenden Fällen ist jedesmal $f'(0) = 0, f''(0) = 0$.

Die oben genannten Regeln werden plausibel, wenn man an die Betrachtungen in (6.4) denkt: Eine negative zweite Ableitung bedeutet eine Rechtskurve, also eine nach unten geöffnete Kurve, was einem Maximum entspricht. Analog funktioniert der Fall einer positiven zweiten Ableitung. Wie üblich überlassen wir auch hier die strengen Beweise den Mathematikern.

(6.6) Beispiele zur Bestimmung von Extrema

(6.7) Graphische Darstellung von Funktionen

Graphen von ein paar Funktionen, welche Sie auswendig kennen sollten

Wichtig:

1. Lesen Sie jetzt das komplette Kapitel im Storrer I selber durch.
2. Lösen Sie danach mindestens 5 Aufgaben hinten im Kapitel und vergleichen Sie mit den Lösungen am Schluss des Buches. Bei Bedarf lösen Sie mehr Aufgaben.
3. Gehen Sie in die Übungsstunde. Drucken Sie das Übungsblatt dazu *vorher* aus, lesen Sie *vorher* die Aufgaben durch und machen sich erste Gedanken dazu (zum Beispiel, wie man sie lösen könnte).
4. Dann lösen Sie das Übungsblatt: zuerst immer selber probieren, falls nicht geht: Tipp von Mitstudi benutzen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi anschauen, 1 Stunde warten, versuchen, aus dem Kopf heraus wieder zu lösen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi abschreiben (und verstehen - also sollte man insbesondere keine Fehler abschreiben!).
5. Lösen Sie die entsprechenden Prüfungsaufgaben im Archiv.