Prüfungsnummer: ____ Name: ____________ Matrikelnummer: ________

Ein-Minuten-Aufgaben

17P. $\hat{=}$ 4.0

Aufgabe 1

a) (*1 Punkt*) Sei X eine $\mathcal{N}(2,4)$-Zufallsgrösse. Berechnen Sie $P[X \in [-1,0]]$. Wir wollen die Z-Transformierte explizit sehen.

b) (*1 Punkt*) Welches ist die häufigste Augensumme beim Wurf von zwei unabhängigen Würfeln? Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ebendiese Augensumme angenommen wird?

c) (*1 Punkt*) X sei $U[0,1]$-verteilt. Wie ist $P[1/X > 3]$?

d) (*1 Punkt*) X sei $U[0,1]$-verteilt. Es gelte mit $b > 1$, dass $P[1/X > b] = 1/c$. Wie ist der Zusammenhang zwischen b und c?

e) (*1 Punkt*) Sei X eine Be(p)-Zufallsgrösse. Wie ist die Verteilung von X^2?

f) (*1 Punkt*) Sei X eine Be(p)-Zufallsgrösse und Y eine davon unabhängige exp(λ)-Zufallsgrösse. Wie sind $E[aX + bY]$ und $V[aX + bY]$?

g) (*1 Punkt*) Wogegen konvergiert in R "`sum(rchisq(n, 3))/n`" wenn $n \to \infty$ und weshalb?

h) (*1 Punkt*) Sei X eine exp(2)-Zufallsgrösse. Berechnen Sie $P[2^X + 2 \leq 3]$.

a) $P[X \in [-1,0]] = P[-1 \leq X \leq 0] = P[-3 \leq X-2 \leq -2] \overset{Z}{=} P[-1.5 \leq N(0,1) \leq -1]$ 1/2

$\overset{T}{=} 0.1587 - 0.0668 \overset{TR}{=} 0.0919$ 1/2

b) 7, $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$; HHS p 41

1/2 1/2

c) $P[1/x > 3] = P[1/3 > x] = P[x < 1/3] = 1/3$

d) $b = c$

e) $Be(p)$

f) $E[aX + bY] = aE[X] + bE[Y] = ap + \frac{b}{\lambda}$ 1/2

$V(aX+bY) = a^2 V(X) + b^2 V(Y) = a^2 p(1-p) + \frac{b^2}{\lambda^2}$ 1/2

g) 3, LLN

1/2 1/2

h) $P[2^X + 2 \leq 3] = P[2^X \leq 1] = P[X \leq 0] = 0.$

1

Wahrscheinlichkeitstheorie

Aufgabe 2

Sei X eine exp(2)-Zufallsgrösse.

a) (*2 Punkte*) Berechnen Sie $P[2^X + 1 \leq 3]$.

b) (*2 Punkte*) Wie ist der Median von $X^2 + 3$?

a) $P[2^X+1 \leq 3] = P[2^X \leq 2] = P[X \leq 1] = 1 - e^{-2} \overset{TR}{=} 0.8647$

1/2 1/2 1/2 1/2

b) $P[X^2+3 \leq a] \overset{!}{=} 1/2$, a = median 1/2

$P[X^2 \leq a-3] \underset{(X \geq 0)}{=} P[X \leq \sqrt{a-3}] = 1 - e^{-2\sqrt{a-3}}$ 1/2

$$\Rightarrow \frac{1}{2} = 1 - e^{-2\sqrt{a-3}}$$

$$\frac{1}{2} = e^{-2\sqrt{a-3}}$$

$$2 = e^{2\sqrt{a-3}}$$

$$\ln 2 = 2\sqrt{a-3}$$

$$\frac{1}{2}\ln 2 = \sqrt{a-3}$$

$$\left(\frac{1}{2}\ln 2\right)^2 = a - 3$$

$$a = \left(\frac{1}{2}\ln 2\right)^2 + 3 = 3.12$$ 1

Wahrscheinlichkeitstheorie

Aufgabe 3

Sei X eine Zufallsgrösse mit folgender Verteilung: $P[X=0]=0.3, P[X=1]=0.3, P[X=2]=0.3, P[X=3]=0.1$.

a) (*1 Punkt*) Berechnen Sie $E[X]$.

b) (*1 Punkt*) Berechnen Sie $V[X]$ und $sd[X]$. .

c) (*1 Punkt*) Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von $X+1$.

d) (*1 Punkt*) Berechnen Sie die Varianz von X^2.

a) $E[X] = 0.3 + 2\cdot 0.3 + 3\cdot 0.1 = \underline{\underline{1.2}}$

b) $E[X^2] = 0.3 + 2^2 \cdot 0.3 + 3^2 \cdot 0.1 = 2.4$; $V(X) = E[X^2] - E[X]^2 = 0.96$ 1/2

$sd(X) = \sqrt{0.96} \doteq 0.9798$ 1/2

c) $E[X+1] = E[X] + 1 = 2.2$; $V(X+1) = V(X) = 0.96$

1/2 1/2

d)

x_i^2	0	1	4	9
p_i	0.3	0.3	0.3	0.1

$\rightarrow$ $E[X^2] = 2.4$ (von oben)

$E[(X^2)^2] = 0.3 + 16 \cdot 0.3 + 81 \cdot 0.1 = 13.2$

$V(X^2) = E[(X^2)^2] - E[X^2]^2 = 7.44$

1

Wahrscheinlichkeitstheorie

Aufgabe 4

Seien $X_1, \ldots, X_{900}$ iid U[2,4]-Zufallsgrössen.

a) (*2 Punkte*) Berechnen Sie mit Hilfe des CLT

$$P\left[\sum_{i=1}^{900} X_i > 2670\right].$$

b) (*2 Punkte*) Sei $Y := \sum_{i=1}^{900} X_i$. Berechnen Sie mit Hilfe des CLT das 10 % Quantil von Y.

a) $$\underline{P\left[\sum_{i=1}^{900} X_i > 2670\right]} = P\left[\frac{\sum_{i=1}^{900} X_i - 900 \cdot 3}{30\sqrt{4/12}} > \frac{2670 - 900 \cdot 3}{30\sqrt{4/12}}\right] \quad 1$$

$$\overset{CLT}{\doteq} P[\mathcal{N}(0,1) > -1.73205] \overset{T}{\doteq} \underline{\underline{0.9582}} \quad 1/2 \quad 1/2$$

b) $$P\left[\sum_{i=1}^{900} X_i \leq a\right] \overset{!}{=} 0.1 \quad 1/2$$

$$\|$$

$$P\left[\frac{\sum_{i=1}^{900} X_i - 2700}{30\sqrt{1/3}} \leq \frac{a - 2700}{30\sqrt{1/3}}\right] \overset{CLT}{\doteq} P\left[\mathcal{N}(0,1) \leq \underbrace{\frac{a - 2700}{30\sqrt{1/3}}}_{T:\ -1.28}\right] = 0. \quad 1/2 \quad 1/2$$

$$-1.28 = \frac{a - 2700}{30\sqrt{1/3}} \Rightarrow a = 2700 - 30\frac{1.28}{\sqrt{3}} = \underline{\underline{2678}} \quad 1/2$$

<u>PS:</u> macht Sinn: bei 2670: 4.18% (Aufgabe a)
bei 2678: 10 % (Aufgabe b)
bei 2700: 50 % (Mitte)

Statistik

Aufgabe 5

Barbara möchte testen, ob eine normalverteilte Zufallsgrösse mit Varianz 1 Mittelwert 0 hat oder nicht (zweiseitig). Sie bekommt dazu 2 Datenpunkte x_1, x_2, welche unabhängig generiert wurden. Jetzt nimmt sie die Summe der beiden Datenpunkte. Wenn deren Absolutbetrag grösser als 2.2 ist, wird sie die $\mathcal{H}_0$-Hypothese verwerfen. Sonst akzeptiert sie diese. [Tipp: wie ist die Summe von unabhängigen Normalverteilungen verteilt?]

a) (*2 Punkte*) Wie gross ist das α?

b) (*1 Punkt*) Beim nachfolgenden Test bekommt sie den Wert 2.5. Wie gross ist der P-Wert dieses Ereignisses?

a) (X_i) iid $N(0,1)$ under H_0

- $X_1 + X_2 \sim \mathcal{N}(0,2)$ 1/2
- $P[-2.2 \leq \mathcal{N}(0,2) \leq 2.2] \overset{\text{Z}}{=} P\left[-\frac{2.2}{\sqrt{2}} \leq N(0,1) \leq \frac{2.2}{\sqrt{2}}\right]$ 1/2

W'keit, H_0 annehmen

$\overset{TR}{\doteq} P[-1.556 \leq N(0,1) \leq 1.556]$

$\overset{T}{=} \cancel{0.06}\ 0.94 - 0.06 = 0.88$

$\Longrightarrow \underline{\underline{\alpha \doteq 0.12}}$ 1

b) $P[|\mathcal{N}(0,2)| \geq 2.5] = 1 - P[-2.5 \leq \mathcal{N}(0,2) \leq 2.5]$ 1/2

$\doteq 1 - P[-1.768 \leq \mathcal{N}(0,1) \leq 1.768]$

$\overset{T}{\doteq} 1 - 0.9616 + 0.0384 \overset{TR}{=} 0.0768$

1/2

Statistik

Aufgabe 6

Sie machen in R den unteren Test. Geben Sie genau an (je 1 Punkt):
a) welcher Test wurde gemacht (genauer Name und Hypothesen)?
b) Berechnen Sie b.
c) Wie kann man aus unteren Angaben den geschätzten Standardfehler berechnen, ohne die 6 Zahlen direkt nochmals zu benutzen? Berechnen Sie so den geschätzten Standardfehler.
d) Angenommen, Sie wollen testen, ob $\mu = 2$ oder nicht (zweiseitig). Welchen Wert nimmt dann die Teststatistik an?
e) Wie ist unten der P-Wert für den einseitigen Test $\mathcal{H}_0 : \mu \leq 0$ vs $\mathcal{H}_0 : \mu > 0$?

```
> a <- c(-2.2, -0.7, 3, 1.5, 0.2, b)
> t.test(a)
data:  a
t = 0.93891, df = 5, p-value = 0.3909
alternative hypothesis:  true mean is not equal to 0
95 percent confidence interval:
-1.390281 2.990281
sample estimates:
mean of x
0.8
```

a) 1-Stichproben-T-Test; $H_0 : \mu = 0$ vs $H_1 : \mu \neq 0$ 1/2 1/2

b) $0.8 = \bar{x} = \frac{-2.2 - 0.7 + 3 + 1.5 + 0.2 + b}{6} \Rightarrow b = 3$ 1/2 1/2

c) $t = \frac{\bar{x}}{s_{\bar{x}}} \Rightarrow s_{\bar{x}} = \frac{\bar{x}}{t} = \frac{0.8}{0.93891} \overset{TR}{=} 0.8521$ 1/2 1/2

d) $t_z = \frac{\bar{x} - 2}{s_{\bar{x}}} = \frac{-1.2}{0.8521} = -1.408$ 1/2 1/2

neue Teststatistik

e) $\frac{0.3909}{2} = 0.1954$ 1

Statistik

Aufgabe 7

0 Punkte wenn Test ob $\hat{p}_1 = \hat{p}_2$!

Sie interessieren sich dafür, ob bei einer bestimmten Krankheit ein Zusammenhang mit dem Geschlecht besteht. Sie haben 400 Frauen und 400 Männer zufällig ausgewählt. Bei den Männern haben 160 die Krankheit und bei den Frauen 134.

a) Testen Sie mit einem χ^2-Test auf dem 5 % - Niveau, ob Geschlecht und Vorhandensein der Krankheit unabhängig sind oder nicht. (3 Punkte)

b) Braucht es für diesen Test die gleiche Anzahl Frauen und Männer (Ja/Nein)? (1 Punkt)

a)

	♀	♂	
Krank	134	160	294
$\overline{\text{Krank}}$	266	240	506
	400	400	800

1/2

, H_0: unabh. vs H_1: nicht unabh.

, $\alpha = 5\%$

1/2

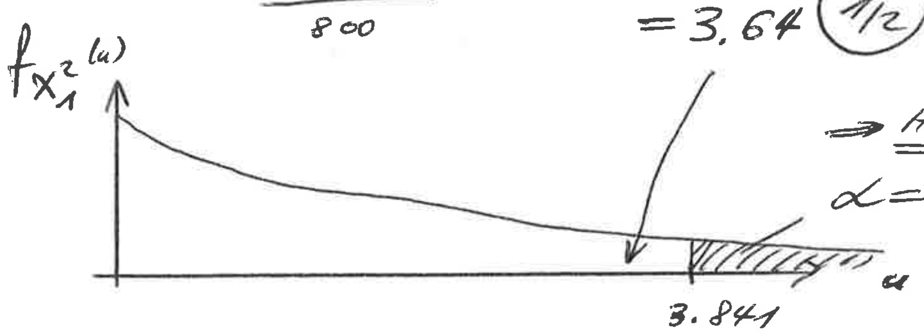
$$u = \sum_{i,j=1,2} \frac{\left(N_{ij} - \frac{N_{i\cdot} N_{\cdot j}}{n}\right)^2}{N_{i\cdot} N_{\cdot j}/n} = \frac{\left(134 - \frac{400 \cdot 294}{800}\right)^2}{\frac{400 \cdot 294}{800}} +$$

1/2

$$+ \frac{\left(160 - \frac{400 \cdot 294}{800}\right)^2}{\frac{400 \cdot 294}{800}} + \frac{\left(266 - \frac{400 \cdot 506}{800}\right)^2}{\frac{400 \cdot 506}{800}}$$

$$+ \frac{\left(240 - \frac{400 \cdot 506}{800}\right)^2}{\frac{400 \cdot 506}{800}} \overset{TR}{\doteq} 1.15 + 1.15 + 0.67 + 0.67$$

$$= 3.64$$ 1/2



$\Rightarrow$ H_0 beibehalten! 1/2

$3.64 < 3.841$ 1/2

b) Nein! 1

Statistik

Aufgabe 8

Unten haben Sie einen R-Ausdruck. Beantworten Sie dazu bitte die folgenden Fragen.

a) (*1 Punkt*) Welches ist die erklärende Variable und welches die "Response"-Variable?

b) (*1 Punkt*) Tragen Sie die Punkte und die Regressionsgerade in einer Skizze möglichst genau ein. Alle Punkte müssen insbesondere auf der richtigen Seite der Regressionsgeraden sein, sonst gibt es keinen Punkt. Beschreiben Sie anhand eines der sechs Punkte, mit welcher Rechnung sie dies erreichen, wenn Sie in Ihrem Taschenrechner keine Graphik anschauen können.

c) (*1 Punkt*) Berechnen Sie den Korrelationskoeffizienten zwischen a und b.

d) (*1 Punkt*) Welchen Wert hätte die Teststatistik für die Steigung, wenn Sie dort testen wollen, ob diese -0.5 ist oder nicht?

```
> a <- c(2,3,4,5,6,7)
> b <- c(4.2, 4.0, 2.8, 3.1, 2.6, 1.3)
> d <- lm(b ~ a)
> summary(d)
...
Coefficients:
              Estimate   Std. Error   t value   Pr(>|t|)
(Intercept)   5.3657     0.4825       11.121    0.000372 ***
a             -0.5257    0.1002       -5.244    0.006322 **
...
```

1/2 1/2

a) a: erklärende Variable; b: response Variable

b) siehe letztes Blatt

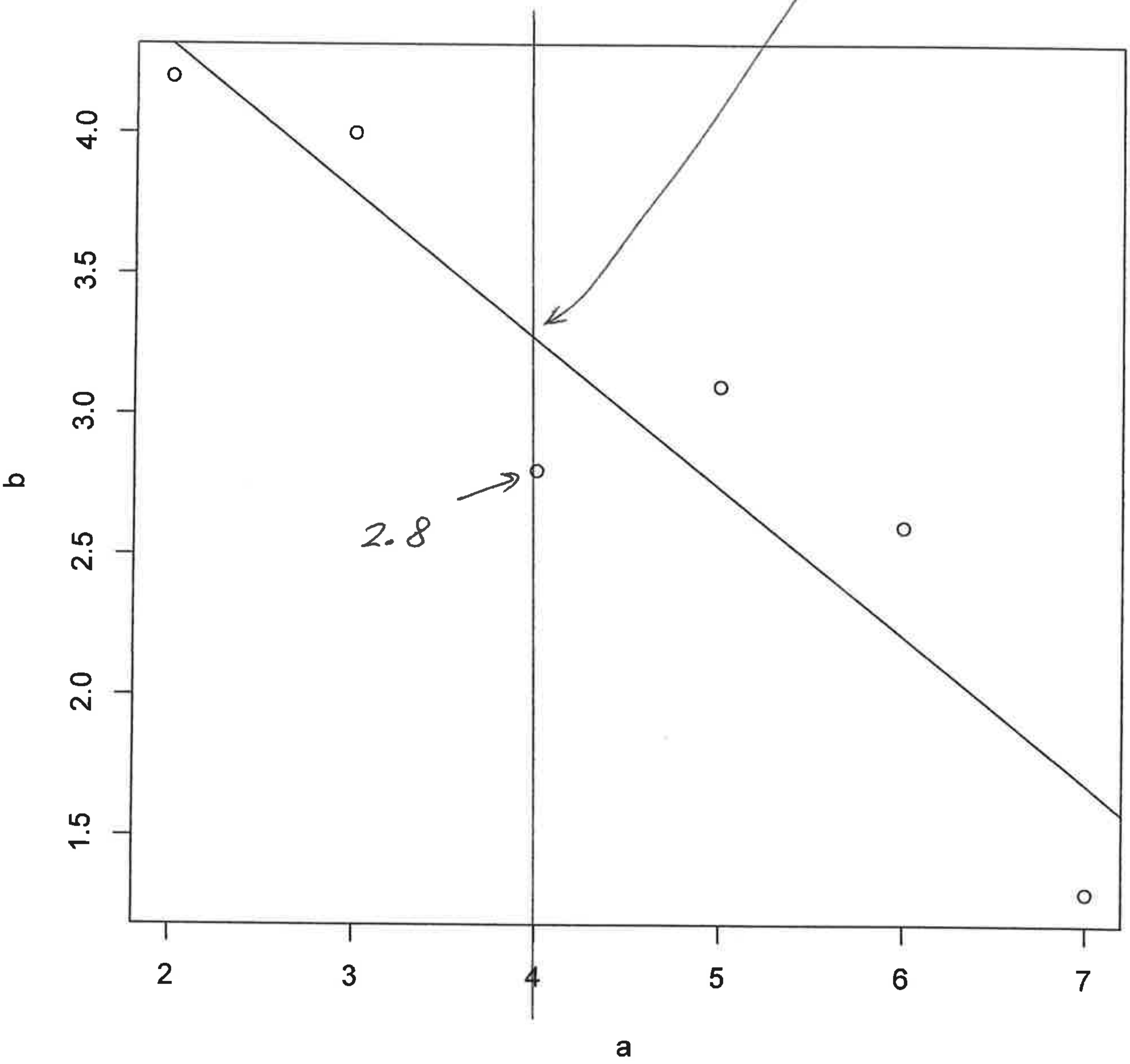
c) $cor(a,b) \overset{TR}{=} -0.934$ (Formel aus 10,2,4) 1

d) $\underbrace{-5.244 = \frac{\hat{\beta}_1}{0.1002}}_{alt}$ 1/2 $\Longrightarrow \underbrace{\frac{-0.5257-(-0.5)}{0,1002}}_{neu} = -0.2565$ 1/2

Schluss von 10.2.1.4 (p 173)

zu A8, a)

zB $5.3657 - 0.5257 \cdot 4 = 3.2629$



1