Stochastik für die Naturwissenschaften

Dr. C.J. Luchsinger

4. Zufallsgrösse X

Literatur Kapitel 4 - Kapitel 4 und 5 anders aufgebaut als im Storrer!

* Storrer: Kapitel (37.2)-(37.8), (38.2)-(38.3), (38.5), (40.2)-(40.5)
* Stahel: Kapitel 4, 5 und 6 (ohne Erwartungswert und Varianz)
* Statistik in Cartoons: Kapitel 4 (ohne Erwartungswert und Varianz)

4.1 Grundlagen

Drei einleitende Beispiele; Beispiel 37.2A und B und Storrer p 113

Definition 4.1 [Zufallsgrösse X (random variable)] *Eine Zufallsgrösse X ist eine Funktion*

$$X : \Omega \to \mathbb{R}.$$

Zufallsgrössen nennt man auch Zufallsvariablen.

4.2 Diskrete Zufallsgrössen

1. Würfel: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. X soll die Zufallsgrösse sein, welche die Augenzahl angibt. Wir wählen $X(i) = i$ für alle $1 \leq i \leq 6$. Falls Y die Zufallsgrösse sein soll, welche das Quadrat der Augenzahl angibt, so wählen wir $Y(i) = i^2$ für alle $1 \leq i \leq 6$.

2. Münzwurf: $\Omega = \{k, z\}$. Ich gewinne 1.- falls es Kopf (k) gibt und verliere 1.- falls es Zahl (z) gibt. X_1 ist mein Konto nach dem *ersten* Münzwurf: $X_1(k) = 1, X_1(z) = -1$.

3. Tierversuch mit *einer* Maus: $\Omega := \{S, D\}$ ("survives, dies"). $U_1(S) = 1$ falls Maus überlebt, $U_1(D) = 0$ falls Maus stirbt. U_1 ist die Anzahl Mäuse, welche nach Versuch noch leben (0 oder 1).

3'. Mehrere Mäuse: gleiches Experiment mit 5 Mäusen, unabhängige Versuche. U_i ist Anzahl überlebende Mäuse im i'ten Versuch, also an i'ter Maus (0 oder 1).

$$W := \sum_{i=1}^{5} U_i$$

ist die Anzahl noch lebende Mäuse, sobald wir alle 5 Experimente abgeschlossen haben.

Wir werden jetzt das bisher Erreichte mit dem dritten Kapitel kombinieren und führen das "P" ein. Angenommen, die Überlebenswahrscheinlichkeit ist 10 %, so können wir

$$P[U_1 = 1]$$

in Beispiel 3 angeben; die Antwort ist:

Mathematisch sauber ist dies

$$P[U_1 = 1] := P[\{\omega | U_1(\omega) = 1\}] = P[\{S\}] = 0.1,$$

weil P auf Teilmengen von Ω (hier $\{S\}$) operiert. Wir müssen aber nicht immer so in die Niederungen der Definitionen absteigen.

Betrachten wir ein Beispiel, welches ein bisschen komplizierter ist (3'): Mit Überlebenswahrscheinlichkeit 10 % haben wir

$$P[W = 4] = 0.00045.$$

Wie kommt man auf diese Zahl? Vielleicht hilft es, wenn man die Formel dazu anschaut (wir müssen diese aber ausgiebig besprechen):

$$\binom{5}{4} 0.1^4 0.9^1.$$

Beispiel 37.5.A im Storrer

Definition 4.2 [Diskrete Zufallsgrösse] *Wenn eine Zufallsgrösse X nur endlich viele oder abzählbar unendlich viele Werte annehmen kann, nennen wir sie diskret.*

Die bisherigen Beispiele in 4.2 waren alle diskret und sogar endlich.

Bevor wir uns der Verteilungs*funktion* zuwenden, wollen wir vom Publikum wissen, welche Verteilungen bereits bekannt sind (es kommen im Verlauf der Vorlesung immer wieder neue Verteilungen vor).

Schema: Name / Wahrscheinlichkeitsfunktion / Bedeutung, Motivation, Modell für ...

Definition 4.3 [Wahrscheinlichkeitsfunktion $P[X = x]$ (probability function) und Verteilungsfunktion F (Cumulative Distribution Function CDF)] *Die Wahrscheinlichkeitsfunktion einer diskreten Zufallsgrösse X ist definiert als*

$$(f(x)) := P[X = x](:= P[\{\omega | X(\omega) = x\}]).$$

Dabei durchläuft x alle möglichen Werte der Zufallsgrösse X. Die Verteilungsfunktion F einer Zufallsgrösse X (diskret oder stetig) ist definiert als

$$F(x) := P[X \leq x](:= P[\{\omega | X(\omega) \leq x\}]).$$

Wenn wir uns an die beschreibende Statistik in Kapitel 2 erinnern, dann entspricht das Stabdiagramm der Wahrscheinlichkeitsfunktion, die Summenhäufigkeit der Verteilungsfunktion. Es gilt zudem offenbar (letztes Gleichheitszeichen nur bei diskret)

$$F(x) = P[X \leq x] = \sum_{x_i \leq x} P[X = x_i].$$

Beispiele von letzten Seiten:

Storrer p 142 und p 357

Welche Eigenschaften besitzen offenbar Verteilungsfunktionen?

Aufgaben 37-2 und 37-3 im Storrer

4.3 Stetige Zufallsgrössen

Die kommenden Seiten sind zentral aber schwer zu verstehen. Eine gute Strategie für die Studierenden ist es, die Resultate vorerst einfach zu akzeptieren, die Beispiele sorgfältig anzuschauen und Übungen dazu gut zu lösen.

Motivation anhand Hund (uniform) und dann Normalverteilung.

Motivation anhand Storrer p 165

Definition 4.4 [Diskrete und stetige Zufallsgrösse] *Wenn eine Zufallsgrösse X nur Werte auf einer abzählbaren Teilmenge von $\mathbb{R}$ annehmen kann, nennen wir sie diskret. Wir nennen eine Zufallsgrösse Y stetig, wenn ihre Verteilungsfunktion F_Y sich darstellen lässt als*

$$F_Y(a) := P[Y \leq a] = P[Y \in (-\infty, a]] = \int_{-\infty}^{a} f(u)du,$$

wobei f eine nichtnegative, stückweise stetige Funktion auf $\mathbb{R}$ ist. Diese Funktion f erfüllt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$$

Wir nennen f Dichte oder Dichtefunktion der Zufallsgrösse Y. Salopp gilt: diskret ist auf einzelnen Punkten und stetig ist auf durchgezogenen Intervallen.

Die Dichtefunktion $f(x)$ der Normalverteilung ist übrigens (ausführlich in Storrer Kapitel 41; mehr in Kapiteln 5 und 6 von Luchsinger):

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Wir werden später sehen, dass μ der sogenannte Erwartungswert ist (ein Lagemass) und σ^2 die sogenannte Varianz (ein Streuungsmass).

Skizzieren Sie: Verteilungsfunktion der Uniform-Zufallsgrösse $U[-1, 0.5]$ (auch Rechteck- oder Gleichverteilung, "gleich**e** Verteilung" ist was anderes...)

Schema zu WF, Dichte und CDF; diskret vs stetig:

Skizzieren Sie: Verteilungsfunktion der Normalverteilung (Gauss)-Zufallsgrösse $\mathcal{N}(2, 4)$

Wir repetieren kurz den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

Wir wollen im Folgenden 4 Eigenschaften von **stetigen** Zufallsgrössen herausarbeiten und am Beispiel der Normalverteilung veranschaulichen.

1. Für $a < b$ haben wir:

$$\begin{aligned} P[a < X \le b] &= P[X \le b] - P[X \le a] \\ &= F(b) - F(a) \\ &= \int_a^b f(x)dx. \end{aligned}$$

2. Für stetige Zufallsgrössen gilt:

$$P[X = x_0] = \int_{x_0}^{x_0} f(x)dx = 0.$$

3. Wegen 2. gilt insbesondere für $a < b$:

$$\begin{aligned} P[a \le X \le b] &= P[a < X \le b] \\ &= P[a < X < b] \\ &= P[a \le X < b] \\ &= P[X \le b] - P[X \le a] \\ &= F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx. \end{aligned}$$

4. Wenn F differenzierbar ist (mit gesundem Menschenverstand auch in den meisten anderen Fällen) gilt:

$$F'(x) = f(x).$$

Weshalb betrachtet man die **Verteilungsfunktion** F einer Zufallsgrösse? 4 Gründe:

1. Wir können im Fall von stetigen Zufallsgrössen mit Hilfe von $F' = f$ einfach die Dichte berechnen.
2. In Kapitel 7 werden wir mit Hilfe der Verteilungsfunktion den CLT (Central Limit Theorem; Zentraler Grenzwertsatz) formulieren können.
3. In der Statistik kann man zum Beispiel mit sogenannten QQ-Plots (Quantil vs Quantil-Plots) Verteilungen miteinander vergleichen (mehr dazu in Stahel 11.2 - Prüfungsstoff).
4. Eher theoretischer Grund: Die Verteilungsfunktion existiert immer (diskret und stetig). Ohne Aufsummieren bzw. Aufintegrieren haben wir im diskreten Fall die Wahrscheinlichkeitsfunktion $P[X = x_i]$ und im stetigen Fall die Dichte $f(x)$. Diese beiden Objekte (Wahrscheinlichkeitsfunktionen und Dichten) entsprechen sich zwar, wir haben aber von der Analysis her andere Gebilde (Summen vs Integrale). Die Verteilungsfunktionen hingegen haben in beiden Fällen die gleiche Bedeutung und Definition:

$$F(x) := P[\{\omega | X(\omega) \leq x\}].$$

Lose Bemerkung: Falls es in einer Aufgabe oder Frage heisst "Wie ist die Verteilung von X?", so ist diese Frage ungenau. Antworten können dann sein:
1. Die Dichte ist...
2. Die Verteilungsfunktion sieht folgendermassen aus...
3. Die Verteilung ist $\mathcal{N}(1, 4)$.

Aufgaben zu Storrer p 361

Fortsetzung zu p 361

Beispiel 40.8.A - Die Exponentialverteilung kurzlebig vs langlebig

Aufgaben aus $(40.\infty)$

4.4 Unabhängigkeit von Zufallsgrössen

Anschaulich bedeutet "X unabhängig von Y", dass X und Y von unabhängigen Mechanismen erzeugt werden. Mathematisch führt man die Unabhängigkeit von Zufallsgrössen auf die Unabhängigkeit von Ereignissen zurück, das heisst: $P[A \cap B] = P[A]P[B]$ (Idee der Faktorisierung). In der folgenden Definition ist ein Komma als "und" zu lesen und damit als Schnittmenge: $\{X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2\}$ heisst $\{X_1 \leq x_1\} \cap \{X_2 \leq x_2\}$.

Definition 4.5 [Unabhängigkeit von Zufallsgrössen; Idee der Faktorisierung] *Zufallsgrössen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ nennen wir unabhängig voneinander, wenn*

$$P[X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \ldots, X_n \leq x_n] = P[X_1 \leq x_1]P[X_2 \leq x_2] \ldots P[X_n \leq x_n]$$

für beliebige $x_1, \ldots, x_n$.

Jargon: unabhängig, identisch verteilt = independent and identically distributed (**iid**)

Warnung: "X_1 und X_2 sind identisch verteilt" heisst nicht, dass $X_1(\omega) = X_2(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$ (gleicher Wert) oder dass die X_i uniform verteilt sind, sondern lediglich, dass die Verteilung gleich ist; zum Beispiel beide Be(p) oder Exp(λ).

Wichtig:

1. Lesen Sie jetzt das komplette Kapitel im Storrer II selber durch, genauer Kapitel 37 - 41 (ohne Erwartungswert und Varianz).

2. Lösen Sie danach mindestens 5 Aufgaben hinten im Kapitel und vergleichen Sie mit den Lösungen am Schluss des Buches. Bei Bedarf lösen Sie mehr Aufgaben.

3. Gehen Sie in die Übungsstunde. Drucken Sie das Übungsblatt dazu *vorher* aus, lesen Sie *vorher* die Aufgaben durch und machen sich erste Gedanken dazu (zum Beispiel, wie man sie lösen könnte).

4. Dann lösen Sie das Übungsblatt: zuerst immer selber probieren, falls nicht geht: Tipp von Mitstudi benutzen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi anschauen, 1 Stunde warten, versuchen, aus dem Kopf heraus wieder zu lösen, falls immer noch nicht geht: Lösung von Mitstudi abschreiben (und verstehen - also sollte man insbesondere keine Fehler abschreiben!).

5. Lösen Sie die entsprechenden Prüfungsaufgaben im Archiv.