Stochastik für die Naturwissenschaften

Dr. C.J. Luchsinger

Intro

1 Motivation zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik (Stochastik)

Was fällt ein bei den Begriffen "Wahrscheinlichkeit" und/oder "Statistik"?

Worum geht es jetzt - the big picture

Kurz zusammengefasst, sind in der Einführung zu dieser Vorlesung unter anderem auch Begriffe und Fragestellungen der folgenden Art aufgetaucht:

Münze (Kopf/Zahl), Würfel; Personen, welche in der Statistik schon ein bisschen geschnuppert haben, kennen Begriffe wie "Gesetz der grossen Zahlen", "Test von Hypothesen". Den meisten Personen kommt beim Wort "Münze" auch die Zahl 1/2 in den Sinn - bei einem Würfel die Zahl 1/6.

Wenn wir eine Münze (oder einen Würfel) 1'000 mal werfen und die Anzahl Kopf (beim Münzwurf) zählen, so *erwarten* wir eine Zahl wie 500. Die "Mitte" (500) kommt den meisten Personen sofort in den Sinn. Warum? Man sagt dann, das ist der Durchschnitt - Personen, welche in der Statistik schon geschnuppert haben, reden vielleicht vom Mittelwert oder Erwartungswert. Oder sie wechseln schnell zur relativen Häufigkeit (teilen durch die Anzahl Würfe) und sagen dann, dass wenn wir immer länger die Münze werfen und die relative Häufigkeit nehmen, so sollte es immer näher an 1/2 kommen.

Bleiben wir bei der Anzahl Kopf bei 1'000 Würfen. Wenn wir uns fragen, welche Werte dabei etwa so vorkommen, so kommen neben der Zahl 500 auch Zahlen wie 503, 488, 509, 511, 514, 478, und so weiter in den Sinn. Irgendwann wird wohl klar, dass theoretisch eigentlich jede ganze Zahl aus der Menge

$$\{0, 1, 2, \ldots, 998, 999, 1000\}$$

als Resultat vorkommen könnte. Wir werden nicht stutzig, wenn jemand sagt, er/sie habe die Münze 1000 mal geworfen und dabei genau 512 mal Kopf erhalten. Wenn jemand aber kommt und sagt, er/sie habe genau 377 mal Kopf erhalten, so fragen wir uns, ob die Münze fair ist oder nicht. Nun kann man sich fragen, wo wir die Grenze ziehen sollten: wo sollten wir Bedenken anmelden, ob die Münze auch wirklich fair ist oder nicht. Bei 400 (und 600 gegen oben (Symmetrie)), bei 450 (550), 490 (510)? Kann man so etwas überhaupt für alle Situationen und Personen verbindlich festschreiben? Dieses Problem lässt sich kurz in einer trivialen Feststellung so zusammenfassen und ist der Grund dafür, dass wir überhaupt durch diese Vorlesung müssen:

Es gibt Variabilität in den Daten!

Genauer: Selbst bei einer fairen Münze wird es um die 500 herum schwanken. Wie weit darf es aber schwanken, bis wir stutzig werden (sollten)?

Dies ist eine zentrale Fragestellung, welche im Statistik-Teil in allen denkbaren Variationen immer wieder auftaucht. Sie wird Ihnen noch in Fleisch und Blut übergehen.

2 Inhalt dieser Vorlesung

Beschreibende Statistik & Kombinatorik Wenn Sie vor Problemen stehen und früher oder später Entscheidungen dazu treffen müssen, sollten Sie zuallererst eine schonungslose Lageanalyse machen. Dies gilt für Ihr persönliches Leben, Managemententscheidungen und wissenschaftliche Forschung. Wenn Sie dazu Daten gemessen oder erhoben haben, dann sollten Sie versuchen, einen ersten Überblick über das Datenmaterial zu erhalten. Von der Politik wissen wir, dass Statistiken so oder so interpretiert werden können. Die *beschreibende Statistik* gibt Ihnen graphische Darstellungsmöglichkeiten und Kennziffern (Mittelwert, Varianz), um einen ersten Überblick über die Daten zu erhalten. Ob Sie dann ehrlich bemüht sind herauszufinden "was los ist", oder ob Sie die Daten selektiv / tendenziös einsetzen, ist dabei noch offen. In einem zweiten Schritt wird man mit Methoden aus der Statistik versuchen, die Daten an ein gutes Modell anzupassen und Schlussfolgerungen zu ziehen. Am Schluss muss man dann wieder den Abnehmern von Statistik (Bevölkerung, Kunden etc.) ein möglichst umfassendes Bild der Situation geben. Auch dort kommt die beschreibende Statistik erneut zum Zug (Kapitel 2). Die *Kombinatorik* ist zwar ein interessantes Teilgebiet der Mathematik - wir werden die Kombinatorik in dieser Vorlesung aber nur als Hilfsmittel einsetzen und wenige Resultate benutzen (Kapitel 1).

Wahrscheinlichkeitsrechnung In der Einführung zu dieser Vorlesung haben wir unter anderem auch über den Münzwurf gesprochen. Dabei kam die Zahl 1/2 in's Spiel - eine *Wahrscheinlichkeit* P. Wir werden uns darüber unterhalten, was dieses "P" für Eigenschaften hat (Kapitel 3). Wenn wir die Münze 1'000 mal werfen und die Anzahl Kopf zählen (so um die 500 herum), dann ist diese Zahl 500 eine sogenannte *Zufallsgrösse* X

(genauer eine Realisation davon). Auch hier gibt es Gesetze, welche wir besprechen werden (Kapitel 4). Wenn die Zahl 500 schon aufgetreten ist: das ist der *Erwartungswert* $E[X]$ dieser Zufallsgrösse - so etwas wie ein erwarteter Wert. Leider kommt dieser Wert nicht immer vor: mal haben wir 523, dann 488, 503, 489, 502 und so weiter. Manchmal muss man sehr oft diesen Versuch machen, bis man genau 500 kriegt. Es gibt eben eine Variabilität (dies ist eine zentrale Feststellung für die Statistik). Wir werden die Variabilität um diese 500 mit der sogenannten *Varianz* $V[X]$ einer Zufallsgrösse beschreiben (Kapitel 5). In Kapitel 6 geben wir eine Übersicht über *Die wichtigsten Verteilungen* - da ist viel Repetition dabei. Damit haben Sie alle wichtigen Resultate in einem Kapitel zusammengefasst. In Kapitel 7 werden wir kurz das Gesetz der grossen Zahlen *Law of Large Numbers* und den Zentralen Grenzwertsatz *Central Limit Theorem* besprechen.

Statistik Die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist das Fundament, auf dem wir Statistik betreiben können. Bleiben wir dazu beim Münzwurf, den wir 1000 mal wiederholen. Wenn Sie berechtigte Zweifel haben, dass die Münze fair ist (nicht je 1/2 als Wahrscheinlichkeit), dann werden Sie die Wahrscheinlichkeit für "Kopf" (& "Zahl") schätzen wollen. Dies geschieht in *Schätzen von Parametern und Konfidenzintervalle* in Kapitel 8. Wenn Sie in obigem Münzwurfspiel eine Zahl wie 438 erhalten - bei einem Geldspiel zu Ihren Ungunsten - dann werden Sie sich (wohl zu Recht) fragen, ob denn diese Münze fair (1/2) war oder nicht. Sie werden sich fragen müssen, wo Sie "berechtigte" Zweifel anmelden dürfen und wo nicht. Dies sind schwierige und wichtige Fragen, welche wir leider in Kapitel 9 (*Testen von Hypothesen*) und weiteren zwar ausführlich - aber von der Natur der Sache her nur unvollständig beantworten können ("es könnte ja einfach nur Zufall sein, dass..."). Schätzen von Parametern und Testen von Hypothesen sind die beiden zentralen Themen der Statistik, auf denen alles weitere aufbaut. In der Praxis werden oft kompliziertere Modelle notwendig sein, um Daten sinnvoll analysieren zu können. Mit *Regression und ANOVA* werden in Kapitel 10 zwei wichtige Methoden besprochen. Mit *Planung von Experimenten* schliesst die Vorlesung mit eher praxisorientierten Hinweisen.

Wenn Sie diese Einführung als zu spielerisch (Münze / Würfel) erleben, dann übersetzen wir doch obige Fragestellung gleich in eine medizinische oder biologische Situation:

Sie haben 1'000 Mäuse, durchtrennen Nerven und wollen jetzt ein neues Verfahren anwenden, um die Nerven wieder zum Wachsen zu bringen (an der Uni Zürich arbeitet man führend in diesem Gebiet). Bisherige Verfahren haben in 50 % der Fälle ein Wachstum bewirkt. Sie kommen jetzt mit einem neuartigen Verfahren und behaupten, es sei besser als alle alten Verfahren. Das ist abstrakt gesehen genau das gleiche Problem wie beim Münzwurf. Wenn Sie bei genau 520 Mäusen Wachstum erreicht haben, sollten Sie mit diesem Resultat noch kein Paper machen (oder das Journal tut gut daran, das Paper zurückzuweisen): solche Resultate wie 520 kommen problemlos auch bei den bisherigen Verfahren (*per Zufall*) vor, wenn man 1'000 Mäuse nimmt und die Behandlung führt mit 50 % Wahrscheinlichkeit zum Erfolg. Wieder stellt sich hier übrigens die Frage: wann soll das Journal Ihr Paper ablehnen und ab wann sollten sie es zur Publikation freigeben?

3 Geschichte

* Für Jahrhunderte haben Menschen statistische Argumente (aus der Testtheorie, mehr in Kapitel 9) benutzt. Dazu ein Beispiel: (Gregor von Tours, 6. Jh.; nach Robert Ineichen) 20 Krieger, "die Gott nicht fürchteten", setzten über einen Fluss, um ein Kloster zu plündern und die Mönche zu töten. Auf dem Rückweg kamen alle bis auf einen in den Fluten um: Gregor: "Nur einer von ihnen blieb unverletzt, jener, der die anderen wegen ihres Vorhabens getadelt hatte. Wenn jemand denkt, dies sei durch Zufall geschehen, so möge er bedenken, dass *ein unschuldiger* Mann gerettet wurde, *inmitten so vieler Verbrecher*". [Hypothesen aufstellen (es gibt keinen Gott), Testen (genau der hat überlebt, welcher an Gott glaubt/unschuldig ist), sog. P-Wert sehr klein (Wahrscheinlichkeit hierfür berechnen unter der Annahme "gibt keinen Gott"), also Null-Hypothese ablehnen (also hier: "es gibt doch einen Gott - der für Gerechtigkeit sorgt")]

* 17. Jahrhundert: Abbruch eines Glückspiels mitten im Spiel (Bullen sind unerwartet aufgetaucht) und man ist in Führung. Wieviel vom denkbaren Gewinn steht einem

fairerweise zu?

* 19. Jahrhundert: Versuche in der Landwirtschaft, Variabilität im Pflanzenwachstum, Düngemethoden
* 20. Jahrhundert: exakte Fundierung der Wahrscheinlichkeitstheorie und Siegeszug durch alle denkbaren (und undenkbaren (Sozial- und Geisteswissenschaften!)) Anwendungsgebiete.

Namen: Jakob Bernoulli, Moivre, Laplace, Gauss, Poisson, Tschebyschew, Markov, Kolmogoroff, Fisher und viele weitere mehr.

4 Wo wird Stochastik (W'theorie und Statistik) heute eingesetzt?

* theoretische, mathematische, spielerische Fragen
* Biologie / Medizin / Naturwissenschaften
* Ingenieur- und Computerwissenschaften
* Technik / Physik / Qualitätskontrolle in der Produktion
* Soziologie / Demographie / Statistische Ämter
* Finanzmathematik
* Versicherungsmathematik

5 Relevanz der einzelnen Kapitel von MAT 183 für Ihr Studium und die Forschung an der MNF

Es wird immer wieder moniert, dass "erst am Schluss in wenigen Wochen die eigentliche Statistik (ab Kapitel 8)" behandelt wird. Erstmal heisst die Vorlesung "Stochastik für die Naturwissenschaften", nicht "Statistik für die Naturwissenschaften", ist also umfassender (Stochastik ist WT + S). Die anderen Kapitel haben für sich alleine auch sehr viel Wert. Welche Kapitel haben wir:

1. Kombinatorik
2. Beschreibende Statistik
3. Wahrscheinlichkeit P
4. Zufallsgrösse X
5. Erwartungswert E und Varianz V
6. Die wichtigsten Verteilungen
7. LLN und CLT
8. Schätzen von Parametern und Konfidenzintervalle
9. Testen von Hypothesen
10. ANOVA/Regression
11. Planung von Experimenten, Miscellanea

Anwendungen in der naturwissenschaftlichen Praxis sind also (ausser der eigentlichen Statistik):

* Der ganze, parallel zum Stoff, vor allem in den Übungen, eingeführte R-Teil wird in sehr vielen Anwendungen direkt gebraucht.
* Kombinatorik (Kapitel 1) braucht man zum Beispiel in der Genetik.
* Beschreibende Statistik (Kapitel 2) ist wichtigste Statistik für alle Anwendungsgebiete.
* Der grosse Block von Kapitel 3-7 ist einerseits wichtiges Fundament für die nachfolgende Statistik ab Kapitel 8. Andererseits wird dort eine Sprache gelernt (die Sprache der Stochastik), mit der in vielen Gebieten der Naturwissenschaften zufällige Mechanismen modelliert werden, unabhängig von einer nachfolgenden statistischen Auswertung von Daten. Das ist quasi das stochastische Gegenstück zu den deterministischen Differentialgleichungen von MAT 182. Unter anderem ist die ganze "Computational Biology" voll von Wahrscheinlichkeiten, Erwartungswerten und Verteilungen.
* Des weiteren sind in Kapiteln 3-7 immer wieder grundsätzliche Überlegungen eingeflossen, welche für die Statistik sehr wichtig sind.