Vorlesungsnotizen

Version 3.7

Lineare Algebra und Geometrie

Mathematik für Sekundarlehrerinnen

Franz Müller

Herbst 2016

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Lineare Gleichungssysteme

1.1 Einleitung

Lineare Algebra ist innerhalb der Mathematik die wichtigste Theorie. Denn sie hat einerseits eine enge Beziehung zu linearen Strukturen in der Geometrie (Geraden, Ebenen, deren Schnittpunkte, Schnittgeraden,...), andererseits ist sie die Theorie der einfachsten Gleichungen und Gleichungssysteme in mehreren *Variablen* oder *Unbekannten*, nämlich derjenigen in denen die Unbekannten nur *linear*, d.h. zur ersten Potenz vorkommen.

Beispiel

$$\boxed{x + 2 \cdot y = 3\ .}$$

Diese Gleichung enthält zwei Variablen, nämlich x und y in linearer Form. Man spricht von *„einer linearen Gleichung in zwei Unbekannten“*. Eine *Lösung* dieser Gleichung besteht aus einem *Zahlenpaar* $(x \mid y)$. Zum Beispiel ist lineare Gleichung mit zwei Unbekannten

$$(x \mid y) = (-1|2)$$

eine Lösung, also $x = -1$ und (gleichzeitig) $y = 2$, da dieses Zahlenpaar die Gleichung

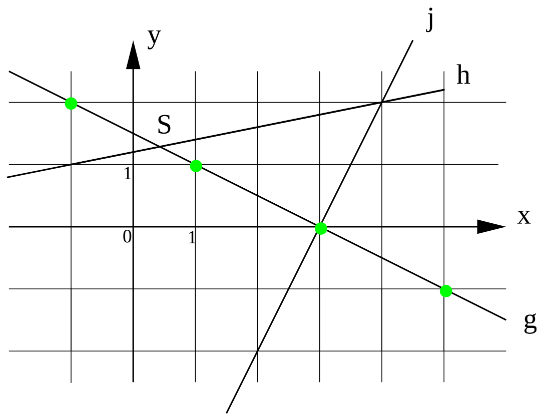
$$x + 2 \cdot y = -1 + 2 \cdot 2 = 3\ \checkmark$$

zu einer wahren Aussage macht. Jedoch ist $(x|y) = (1|2)$ *keine* Lösung der obigen Gleichung, da

$$x + 2 \cdot y = 1 + 2 \cdot 2 = 5 \neq 3\ .$$

Durch diese eine lineare Gleichung in zwei Variablen werden also die Zahlenpaare $(x|y)$ aufgeteilt in solche, die die Gleichung erfüllen (Lösungen) und solche, die die Gleichung nicht erfüllen.

geometrische Interpretation des obigen Beispiels
Identifiziert man die Zahlenpaare $(x|y)$ mittels eines *cartesischen* Koordinatensystems[1] mit den Punkten der xy–Ebene, so zeigt sich, dass die Lösungen obiger Gleichung genau mit den Punkten der Geraden g in folgender Figur zusammenfallen.



In der Tat lesen wir aus der Figur, dass z.B. die Punkte $(x|y) = (1|1)$, $(3|0)$, $(5|-1)$ alle auf g liegen. Einsetzen der entsprechenden Werte für x und y in unsere Gleichung ergibt allemal eine wahre Aussage. Umgekehrt entnehmen wir der Gleichung, dass $(x|y) = (0|3/2)$ aber auch $(x|y) = (2|1/2)$ Lösungen sind, welche wir unschwer mit den entsprechenden Punkten in der Graphik in Zusammenhang bringen, die offensichtlich auf g liegen. Die Gesamtheit aller Lösungen unserer Gleichung, die sog. *Lösungsmenge* $\mathbb{L}$ lässt sich beschreiben durch Lösungsmenge

$$\boxed{\mathbb{L} = \{(x|y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x|y) = (1+2t \,|\, 1-t) \text{ mit } t \in \mathbb{R}\} .}$$

Man nennt dies eine *Parameterdarstellung* der Lösungsmenge, mit dem frei wählbaren Parameter $t \in \mathbb{R}$. Wählt man z.B. $t = 1/2$, so erhält man $x = 1 + 2t = 2$ und $y = 1 - t = 1/2$, also die Lösung $(x|y) = (2|1/2)$. Da die Lösungen unserer Gleichung geometrisch interpretiert genau den Punkten auf der Geraden g entsprechen, spricht man bei obiger Darstellung der Lösungsmenge $\mathbb{L}$ auch von einer *Parameterdarstellung der Geraden* g. Es ist wichtig festzuhalten, dass eine solche Parameterdarstellung nicht eindeutig ist. Die Menge

Parameterdarstellung der Lösungsmenge

Parameterdarstellung der Lösungsmenge ist nicht eindeutig

$$\widetilde{\mathbb{L}} = \{(x|y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x|y) = (3+s \,|\, -s/2) \text{ mit } s \in \mathbb{R}\} = \mathbb{L} .$$

enthält die genau gleichen Punkte wie $\mathbb{L}$, ist also als Menge *gleich* $\mathbb{L}$. Man sieht dies ein, indem man in $\widetilde{\mathbb{L}}$ den Parameter s durch $2t - 2$ ersetzt.

Aufgabe

Gib eine lineare Gleichung in zwei Unbekannten, deren Lösungsmenge genau den Punkten auf der Geraden h in der obigen Figur entspricht. Ebenso für j.

---

[1]nach *René Descartes*, 1596–1650, französischer Mathematiker und Philosoph: Rechtwinklige Koordinatensysteme mit gleichen Einheitslängen auf der x–Achse (Abszisse) und y–Achse (Ordinate) zum Studium der Geometrie wurden allerdings schon vor ihm benutzt.

Lösung: Siehe Fussnote[2]
Zur Kontrolle der Lösung für h können wir die Punkte $(-1|1)$ und $(4|2)$, die ja beide gemäss Figur auf h liegen, in die gefundene Gleichung einsetzen und nachrechnen, dass wahre Aussagen entstehen. Analog für j.

Ein System linearer Gleichungen

Wir schreiben nun die Gleichungen für g und h untereinander

$$\boxed{\begin{aligned} g\colon x+2y &= 3\ , \\ h\colon x-5y &= -6 \end{aligned}}$$

und suchen Zahlenpaare (oder geometrisch: Punkte), die beide Gleichungen lösen. Es ist klar, dass dies auf die Bestimmung des Schnittpunktes $S = g \cap h$ hinausläuft. Wie aber geht man rechnerisch vor? Eine Möglichkeit wäre, die erste Gleichung nach x aufzulösen,

$$x = 3 - 2y\ ,$$

dies in die zweite Gleichung einzusetzen,

$$x - 5y = (3-2y) - 5y = -6\ ,\ \text{also } 3 - 7y = -6 \text{ oder } y = 9/7$$

und daraus dann $x = 3 - 2y = 3 - 2 \cdot 9/7 = 3/7$ zu bestimmen. In der Tat zeigt ein Blick auf die Figur, dass die Koordinaten $S = (3/7|9/7)$ für den Schnittpunkt S stimmen mögen.

Lösungsmenge besteht hier nur aus einem Element

Schreibt man ein lineares Gleichungssystem bestehend aus zwei linearen Gleichungen in zwei Unbekannten hin, so kann die Lösungsmenge auch leer sein (wenn die beiden Geraden parallel aber nicht identisch sind) oder unendlich viele Elemente (Zahlenpaare) enthalten (wenn die beiden Geraden zusammenfallen).

> Ziel
> Ein Ziel dieser Vorlesung besteht darin, die Lösungsmenge eines Systems von n linearen Gleichungen in m Unbekannten zu bestimmen, für beliebige $m, n \in \mathbb{N}$.

Da wir also schliesslich Systeme beliebig vieler linearer Gleichungen in beliebig vielen Variablen lösen können wollen, brauchen wir eine systematische Art vorzugehen, also einen sog. *Algorithmus*, den man auch als Coputerprogramm ausformulieren könnte. In unserem Fall ist dies der sog. *Gauß*–Algorithmus[3] (GA), den wir zunächst an Hand von Beispielen besprechen.

Gauß–Algorithmus (GA)

Wir betrachten nochmals obiges System zweier linearer Gleichungen in den zwei Unbekannten x und y. Der erste Schritt des GA besteht nun darin, dass man in der zweiten Gleichung die Variable x zum Verschwinden bringt und zwar nicht, wie dies

[2] Das Blatt um 180° drehen: $h\colon x - 5y = -6\ ,\quad j\colon 2x - y = 6$

[3] *Carl Friedrich Gauß*, Braunschweig 1777 — Göttingen 1855, herausragender deutscher Mathematiker, bewies z.B. am 30. März 1796 die Konstruierbarkeit des regulären 17–Ecks, das erste derartige Resultat seit über 2000 Jahren !

vorhin geschah, durch Auflösen der ersten Gleichung nach x und Einsetzen in die zweite Gleichung, sondern durch Beibehaltung der ersten Gleichung und *Subtraktion dieser ersten Gleichung von der zweiten Gleichung*. Man erhält eine sog. *Stufenform* Stufenform

$$\begin{aligned} x + 2y &= 3\ , \\ -7y &= -9\ . \end{aligned}$$

Mit „Subtraktion der ersten Gleichung von der zweiten" ist also folgendes gemeint

$$(x - 5y) - (x + 2y) = -6 - 3 \text{ oder eben } -7y = -9\ .$$

Die (eindeutige) Lösung erhält man nun, indem man durch sog. *Rückwärtseinsetzen* zuerst y aus der untersten und dann x mit diesem y aus der ersten Gleichung berechnet: Rückwärtseinsetzen

$$y = 9/7 \quad \Rightarrow \quad x + 2 \cdot y = x + 2 \cdot 9/7 = 3 \quad \Rightarrow \quad x = 3/7\ .$$

Als nächstes betrachten wir ein System *zweier* linearer Gleichungen in *drei* Variabeln

Beispiel

$$\begin{aligned} 2 \cdot x - 2 \cdot y + 3 \cdot z &= 6\ , \\ 4 \cdot x + 2 \cdot y - 2 \cdot z &= 7\ . \end{aligned}$$

Um die Variable x in der zweiten Gleichung zum Verschwinden zu bringen subtrahieren wir von dieser das Doppelte der ersten Gleichung, also

$$(4 \cdot x + 2 \cdot y - 2 \cdot z) - 2 \cdot (2 \cdot x - 2 \cdot y + 3 \cdot z) = 7 - 2 \cdot 6$$

oder zusammengefasst

$$0 \cdot x + 6 \cdot y - 8 \cdot z = -5\ .$$

Die erste Gleichung übernehmen wir unverändert und erhalten so die Stufenform Stufenform

$$\begin{aligned} 2 \cdot x - 2 \cdot y + 3 \cdot z &= 6\ , \\ 6 \cdot y - 8 \cdot z &= -5\ . \end{aligned}$$

Die Zahlentripel $(x|y|z) \in \mathbb{R}^3$, die diese zwei Gleichungen erfüllen sind genau die gleichen, die die ursprünglichen zwei Gleichungen erfüllen. Man sagt, die zwei Gleichungssysteme sind *aequivalent*. Aequivalenz von Gleichungssystemen

Die Lösungsmenge besteht aus unendlich vielen Elementen, denn mit Rückwärtseinsetzen folgt aus der letzten Gleichung $6 \cdot y = -5 + 8 \cdot z$ oder $y = -5/6 + (4/3) \cdot z$. Setzt man dies in die erste Gleichung ein, so erhält man

$$2 \cdot x - 2 \cdot (-5/6 + (4/3) \cdot z) + 3 \cdot z = 6 \text{ oder } x = 13/6 - (1/6) \cdot z\ .$$

Wir erhalten also eine Parameterdarstellung der Lösungsmenge

Parameterdarstellung der Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \{(x|y|z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x|y|z) = (\frac{13}{6} - \frac{z}{6} \,|\, -\frac{5}{6} + \frac{4z}{3} \,|\, z) \text{ mit } z \in \mathbb{R}\,\}$$

mit Parameter $z \in \mathbb{R}$. Wir erinnern daran, dass eine solche Parameterdarstellung nicht eindeuutig ist, denn

$$\mathbb{L} = \tilde{\mathbb{L}} = \{(x|y|z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x|y|z) = (2 + t \,|\, \frac{1}{2} - 8t \,|\, 1 - 6t) \text{ mit } t \in \mathbb{R}\,\}$$

ist z.B. eine alternative Darstellung der gleichen Menge (mit $z = 1 - 6t$).

Beispiel

$$\begin{aligned} 2 \cdot x - 2 \cdot y + 3 \cdot z &= 6\ , \\ 4 \cdot x + 2 \cdot y - 2 \cdot z &= 7\ , \\ x + 4 \cdot y + 4 \cdot z &= 8\ . \end{aligned}$$

Dies ist ein lineares Gleichungssystem mit *drei* Gleichungen in *drei* Unbekannten. Gegenüber dem vorangehenden Beispiel haben wir hier einfach eine weitere lineare Gleichung hinzugefügt. Um die Variable x auch in der dritten Gleichung zu eliminieren, subtrahieren wir von dieser *die Hälfte* der ersten Gleichung,

$$(x + 4 \cdot y + 4 \cdot z) - \frac{1}{2} \cdot (2 \cdot x - 2 \cdot y + 3 \cdot z) = 8 - \frac{1}{2} \cdot 6 \text{ oder } 5 \cdot y + \frac{5}{2} \cdot z = 5\ .$$

Das gemäss GA modifizierte aber aequivalente Gleichungssystem lautet nun also

$$\begin{aligned} 2 \cdot x - 2 \cdot y + 3 \cdot z &= 6\ , \\ 6 \cdot y - 8 \cdot z &= -5\ , \\ 5 \cdot y + \frac{5}{2} \cdot z &= 5\ . \end{aligned}$$

Um die gewünschte Stufenform zu erhalten, subtrahieren wir nun noch von der letzten Gleichung 5/6 der zweiten Gleichung,

$$(5 \cdot y + \frac{5}{2} \cdot z) - \frac{5}{6} \cdot (6 \cdot y - 8 \cdot z) = 5 - \frac{5}{6} \cdot (-5) \text{ oder } \frac{55}{6} \cdot z = \frac{55}{6}\ ,$$

weil damit in der letzten Gleichung die Variable y eliminiert wird. Ein zum ursprünglichen Gleichungssystem aequivalentes Gleichungssystem in Stufenform ist also

Stufenform

$$\begin{aligned} 2 \cdot x - 2 \cdot y + 3 \cdot z &= 6\ , \\ 6 \cdot y - 8 \cdot z &= -5\ , \\ \frac{55}{6} \cdot z &= \frac{55}{6}\ . \end{aligned}$$

Rückwärtseinsetzen: Aus der letzten Gleichung folgt $z = 1$ und Einsetzen in die zweite Gleichung liefert $6 \cdot y - 8 \cdot 1 = -5$, also $y = 1/2$. Schliesslich liefert Einsetzen in die erste Gleichung

$$2 \cdot x - 2 \cdot \frac{1}{2} + 3 \cdot 1 = 6 \text{ also } x = 2 \ .$$

Die Lösungsmenge enthält also genau ein Element (Zahlentripel), man spricht von einer *eindeutigen* Lösung,

$$\mathbb{L} = \{(x|y|z) = (2|\frac{1}{2}|1)\} \ .$$

Achtung

Es wäre nun naiv zu denken, dass ein System dreier linearer Gleichungen in drei Variabeln immer eine eindeutige Lösung habe, „weil es gleichviele Gleichungen wie Unbekannte hat“ wogegen ein System zweier linearer Gleichungen in drei Variabeln immer unendlich viele Lösungen habe, „weil es weniger Gleichungen wie Unbekannte hat.“ Der Zusammenhang zwischen Anzahl Gleichungen, Anzahl Unbekannter und Anzahl Lösungen eines linearer Gleichungssystems ist viel subtiler. Zum umfassenden Verständnis dieses Zusammenhanges braucht es Begriffe aus der linearen Algebra: *Vektorraum, Unterraum, Dimension, Kern, Bild, Rang.* Wir werden uns erst später genauer damit auseinandersetzen. Im Prinzip gibt uns aber der GA bereits die technischen Hilfsmittel dazu in die Hand.

Aufgabe

Wir betrachten ein Gleichungs„system“

$$a \cdot x = b$$

bestehend aus einer linearen Gleichung in einer Variabeln x.

a) Für welche Koeffizienten $a, b \in \mathbb{R}$ hat es keine Lösung x ?

b) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ hat es eine eindeutige Lösung? Welche?

c) Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ hat es unendlich viele Lösungen? Welche?

Notation

Wir wollen für den GA eine möglichst handliche Notation einführen, da er für das Lösen linearer Gleichungssysteme zentral ist. Dazu betrachten wir nochmals das letzte Beispiel

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2 \cdot x & - & 2 \cdot y & + & 3 \cdot z & = & 6 \ , \\ 4 \cdot x & + & 2 \cdot y & - & 2 \cdot z & = & 7 \ , \\ x & + & 4 \cdot y & + & 4 \cdot z & = & 8 \ . \end{array} \quad \leftrightarrow \quad \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & -2 & 7 \\ 1 & 4 & 4 & 8 \end{array} \right) .$$

Wir notieren also nur noch die Koeffizienten des Gleichungssystems und lassen die Variabelnamen „x“ , „y“ und „z“ weg. Wie wir oben Schritt für Schritt ausgeführt haben ist das Ziel des GA, ein aequivalentes Gleichungssystem in *Stufenform* zu erhalten, das wir dann durch *Rückwärtseinsetzen* leicht lösen können. Um die Variable

x in der zweiten und dritten Gleichung zu eliminieren, subtrahieren wir wie oben ausgeführt, von der zweiten Gleichung das Doppelte der ersten, symbolisch

$$II) - 2 \cdot I) \quad ,$$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 3 & 6 \\ 4 & 2 & -2 & 7 \\ 1 & 4 & 4 & 8 \end{array}\right) \; II) - 2 \cdot I) \; \longrightarrow \; \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & -8 & -5 \\ 1 & 4 & 4 & 8 \end{array}\right) ,$$

und von der dritten Gleichung die Hälfte der ersten, symbolisch $III) - \frac{1}{2} \cdot I)$,

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & -8 & -5 \\ 1 & 4 & 4 & 8 \end{array}\right) \; III) - \tfrac{1}{2} \cdot I) \; \longrightarrow \; \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & -8 & -5 \\ 0 & 5 & \frac{5}{2} & 5 \end{array}\right) .$$

Schliesslich subtrahierten wir von der (neuen) dritten Gleichung 5/6 der (neuen) zweiten Gleichung, symbolisch $III) - \frac{5}{6} \cdot II)$, um die Variable y in der dritten Gleichung noch zu eliminieren und so die gewünschte Stufenform zu erhalten,

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & -8 & -5 \\ 0 & 5 & \frac{5}{2} & 5 \end{array}\right) \; III) - \tfrac{5}{6} \cdot II) \; \longrightarrow \; \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 6 & -8 & -5 \\ 0 & 0 & \frac{55}{6} & \frac{55}{6} \end{array}\right) .$$

Wenn wir nun wieder die Variabelnamen einsetzen, erhalten wir das Gleichungssystem auf S.5 und lösen dies durch Rückwärtseinsetzen.

1.2 Der Gauß–Algorithmus (GA)

Es ist relativ aufwendig und nicht sehr erhellend, den GA für ein lineares Gleichungssystem mit m linearen Gleichungen in n Variabeln formal hinzuschreiben. Stattdessen betrachten wir nochmals ein Beispiel[4], das allgemein genug ist, um alle wesentlichen Schritte diskutieren zu können.

Beispiel

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & 2 \cdot x_2 & + & 3 \cdot x_3 & + & 4 \cdot x_4 & + & 5 \cdot x_5 & = & 4 \, , \\ 2 \cdot x_1 & + & 3 \cdot x_2 & + & 4 \cdot x_3 & + & 5 \cdot x_4 & + & 6 \cdot x_5 & = & 5 \, , \\ -x_1 & + & x_2 & + & 3 \cdot x_3 & + & 5 \cdot x_4 & + & 7 \cdot x_5 & = & 5 \, , \\ 2 \cdot x_1 & & & - & 2 \cdot x_3 & - & 4 \cdot x_4 & - & 6 \cdot x_5 & = & -4 \, . \end{array}$$

Es handelt sich hier um ein lineares Gleichungssystem bestehend aus *vier* linearen Gleichungen in *fünf* Variabeln, ein sog. 4×5–*System*. Wie schon oben gesagt wäre es naiv, von vornherein anzunehmen, das Gleichungssystem habe (unendlich viele) Löungen, „da es mehr Unbekannte (5) als Gleichungen (4) hat.“ Stattdessen führen wir den GA durch, um die Lösungsmenge zu bestimmen. Sie könnte auch leer sein. $m \times n$–System

[4]nach Aufgabe 1 der FWP1 vom 16. Januar 2016.

In einem ersten Schritt lassen wir die Variabelnamen x_1 , ... , x_5 weg und schreiben stattdessen

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & 5 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & -2 & -4 & -6 & -4 \end{array}\right) .$$

Um die erste Variable (x_1) in der zweiten, dritten und vierten Gleichung zu eliminieren, subtrahieren wir von der zweiten Gleichung zweimal die erste, addieren zur dritten die erste und subtrahieren wiederum von der dritten zweimal die erste,

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 5 \\ -1 & 1 & 3 & 5 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & -2 & -4 & -6 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II) - 2 \cdot I) \\ III) + I) \\ IV) - 2 \cdot I) \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -3 \\ 0 & 3 & 6 & 9 & 12 & 9 \\ 0 & -4 & -8 & -12 & -16 & -12 \end{array}\right) .$$

Um nun die zweite Variable (x_2) aus der dritten und vierten Gleichung zu eliminieren, addieren wir zur (neuen) dritten Gleichung 3–mal die (neue) zweite und subtrahieren von der (neuen) vierten 4–mal die (neue) zweite,

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -3 \\ 0 & 3 & 6 & 9 & 12 & 9 \\ 0 & -4 & -8 & -12 & -16 & -12 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III) + 3 \cdot II) \\ IV) - 4 \cdot II) \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) .$$

Wäre das Beispiel nicht so konstruiert, dass wir nun schon fertig sind, so hätten wir z.B.

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & a & * & * & * \\ 0 & 0 & b & * & * & * \end{array}\right)$$

erhalten, mit irgendwelchen Koeffizienten $a, b, * \in \mathbb{R}$. Im nächsten Schritt würden wir dann die dritte Variable (x_3) aus der vierten Gleichung eliminieren, indem wir von der (neuen) vierten Gleichung das b/a–fache der (neuen) dritten Gleichung subtrahierten,

$$\left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & a & * & * & * \\ 0 & 0 & b & * & * & * \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ IV) - \frac{b}{a} \cdot III) \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{rrrrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & a & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & * & * & * \end{array}\right) .$$

Dies wäre die gesuchte Stufenform aus der wir durch Rückwärtseinsetzen eine Parameterdarstellung der Lösungsmenge (mit *einem* Parameter) ermittelten. In unserem konkreten (sehr speziellen) Beispiel lautet das erhaltene Gleichungssystem in Stufenform jedoch

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 4 \ , \\ -x_2 - 2x_3 - 3x_4 - 4x_5 &= -3 \ , \end{aligned}$$

wobei wir die zwei Nullzeilen einfach weggelassen haben. Aus der zweiten Gleichung folgt

$$x_2 = 3 - 2x_3 - 3x_4 - 4x_5$$

und wenn wir dies in die erste Gleichung einsetzen ergibt sich

$$\begin{aligned} x_1 &= 4 - 2(3 - 2x_3 - 3x_4 - 4x_5) - 3x_3 - 4x_4 - 5x_5 \\ &= -2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 \; . \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge besteht also aus allen 5–Tupeln $(x_1|x_2|x_3|x_4|x_5)$ der Form

$$(-2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 \,|\, 3 - 2x_3 - 3x_4 - 4x_5 \,|\, x_3 \,|\, x_4 \,|\, x_5) \text{ mit } x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R} \; ,$$

wobei x_3 , x_4 und x_5 als *drei* frei wählbare Parameter aufzufassen sind. Wiederum kann eine Parameterdarstellung dieser Lösungsmenge auch ganz anders aussehen.

Parameterdarstellung der Lösungsmenge enthält drei frei wählbare Parameter

Test

Nach einer solchen Rechnung lohnt es sich jeweils, ein paar *Kontrollen* durchzuführen. Z.B. ergibt die Parameterwahl $x_3 = x_4 = x_5 = 0$ die Lösung

Kontrollen !

$$(x_1|x_2|x_3|x_4|x_5) = (-2|3|0|0|0) \; ,$$

die man durch Einsetzen in das ursprüngliche Gleichungssystem auf S.7 leicht überprüft. Ebeso ergibt z.B. die Parameterwahl $x_3 = 2$, $x_4 = x_5 = 0$ die Lösung

$$(x_1|x_2|x_3|x_4|x_5) = (0|-1|2|0|0) \; ,$$

die man ebenso leicht überprüft etc. etc. Durch solche Tests lassen sich allfällige Rechenfehler leicht aufspüren.

Beschreibung des GA in Worten

Wie gesagt ist es aufwendig und nicht sehr erhellend, wenn man dan Gauß–Algorithmus rein formal zu beschreiben versucht. Wir versuchen also hier eine Umschreibung. Wir gehen aus von einem linearen $m \times n$–Gleichungssystem,

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n &= b_1 \; , \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n &= b_2 \; , \\ \vdots \;\; &\;\vdots\;\; \vdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n &= b_n \; , \end{aligned}$$

also mit m Gleichungen in n Variabeln x_1 , x_2 , . . . , x_n . In sog. *Matrixform* schreiben wir dieses Gleichungssystem kurz

Matrixform

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) ,$$

da die Variabelnamen nichts zur Sache tun. Dabei ist a_{jk} der Koeffizient der k–ten Variable in der j–ten Gleichung und b_j die rechte Seite der j–ten Gleichung. In einem ersten Schritt des GA eliminiert man nun die erste Variable (x_1) aus allen Gleichungen ausser der ersten. Dies geschieht durch Subtrahieren eines geeigneten Vielfachen der ersten Gleichung von der zweiten, dritten, …, m–ten. Konkret subtrahiert man von der zweiten Gleichung das $\frac{a_{21}}{a_{11}}$–fache der ersten Gleichung, …, und schliesslich von der m–ten das $\frac{a_{m1}}{a_{11}}$–fache der ersten. Dies führt zum aequivalenten Gleichungssystem

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \tilde{a}_{m2} & \dots & \tilde{a}_{mn} & \tilde{b}_m \end{array}\right).$$

Dabei ist dann z.B. $\tilde{a}_{22} = a_{22} - \frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot a_{12}$, $\tilde{a}_{2n} = a_{2n} - \frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot a_{1n}$, $\tilde{b}_2 = b_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot b_1$ etc. Dies ist natürlich nur durchführbar, falls $a_{11} \neq 0$ ist, d.h. falls der Koeffizient von x_1 in der ersten Gleichung nicht verschwindet. Da die Reihenfolge der Gleichungen jedoch keine Rolle spielt, kann man im Falle $a_{11} = 0$ einfach die Gleichungen vertauschen, so dass eine Gleichung zuoberst steht, wo der Koeffzient von x_1 nicht verschwindet. Im zweiten Schitt wird man nun die Variable x_2 aus allen Gleichungen eliminieren ausser den ersten zwei. Dazu subtrahiert man geeignete Vielfache der (neuen) zweiten Gleichung von der dritten bis zur m–ten, so dass unter $\tilde{a}_{22}$ alles Nullen stehen. (Falls $\tilde{a}_{22} = 0$ kann man die zweite mit einer der späteren Gleichungen vertauschen.) Dies wird so fortgesetzt bis man die gewünschte Stufenform erreicht hat

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \end{array}\right).$$

Das entsprechende aequivalente Gleichungssystem lässt sich dann durch Rückwärteinsetzen lösen, falls es überhaupt Lösungen hat. Die Lösungsmenge ist *leer*, falls man in der Stufenform in einer Zeile links lauter Nullen hat und rechts ein Eintrag verschieden von Null ist. Ist dies nicht der Fall und hat man in der Stufenform weniger Gleichungen als Variabeln, so gibt die Differenz dieser Zahlen die Anzahl freier Parameter in der Parameterdarstellung der Lösungsmenge an. In unserem Beispiel oben hatten wir in der Stufenform zwei Gleichungen (wobei die Nullzeilen einfach weggelassen werden) und fünf Variabeln, also *drei* Parameter in der Darstellung der Lösungsmenge. Hat man in der Stufenform gleich viele Gleichungen (ohne die Nullzeilen) wie Variabeln, so ist die Lösung eindeutig (Parameterdarstellung der Lösungsmenge hat „null“ frei wählbare Parameter).

leere Lösungsmenge

Anzahl Parameter der Lösungsmenge

eindeutige Lösung

Beispiel
Wir betrachten ein weiteres Beispiel, ein lineares Gleichungssystem bestehend aus vier linearen Gleichungen in vier Unbekannten.

$$\boxed{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2\cdot a & + & b & + & c & + & 3\cdot d & = & 3\,, \\ 4\cdot a & + & 2\cdot b & + & c & + & 2\cdot d & = & 8\,, \\ 3\cdot a & + & 3\cdot b & - & c & + & 8\cdot d & = & -1\,, \\ 5\cdot a & + & 4\cdot b & - & 2\cdot c & + & 3\cdot d & = & 6\,. \end{array}}$$

Wir schreiben dies in Matrixform und eliminieren die Variable a (ausser in der ersten Gleichung),

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 1 & 2 & 8 \\ 3 & 3 & -1 & 8 & -1 \\ 5 & 4 & -2 & 3 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II)-2\cdot I) \\ III)-\frac{3}{2}\cdot I) \\ IV)-\frac{5}{2}\cdot I) \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 3/2 & -5/2 & 7/2 & -11/2 \\ 0 & 3/2 & -9/2 & -9/2 & -3/2 \end{array}\right).$$

Da in der zweiten Gleichung nicht nur a sondern zufällig auch b eliminiert wurde, vertauschen wir vor dem nächsten Schritt die zweite und dritte Gleichung und eliminieren dann b noch aus der vierten Gleichung.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 3/2 & -5/2 & 7/2 & -11/2 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 3/2 & -9/2 & -9/2 & -3/2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ IV)-II) \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 3/2 & -5/2 & 7/2 & -11/2 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -8 & 4 \end{array}\right).$$

Schliesslich eliminieren wir noch c aus der vierten Gleichung,

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 3/2 & -5/2 & 7/2 & -11/2 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -8 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ IV)-2\cdot III) \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 2 & 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 3/2 & -5/2 & 7/2 & -11/2 \\ 0 & 0 & -1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

In diesem Schritt wurde zufällig in der letzten Gleichung auch d eliminiert und wir haben in der Stufenform also eine Gleichung weniger (3) als Variabeln (4). Die Lösungsmenge enthält also $1 = 4 - 3$ frei wählbaren Parameter. Aus der letzten (dritten) Gleichung folgt

$$-c - 4\cdot d = 2 \text{ oder } c = -2 - 4\cdot d\,.$$

Rückwärtseinsetzen in die (mit 2 multiplizierte) zweite Gleichung ergibt

$$\begin{aligned} 3\cdot b - 5\cdot c + 7\cdot d &= 3\cdot b - 5\cdot(-2-4\cdot d) + 7\cdot d = 3\cdot b + 10 + 27\cdot d = -11 \\ \text{oder } b &= -7 - 9\cdot d\,. \end{aligned}$$

Schliesslich setzen wir dies alles in die erste Gleichung ein und erhalten

$$\begin{aligned} 2\cdot a + b + c + 3\cdot d &= 2\cdot a + (-7-9\cdot d) + (-2-4\cdot d) + 3\cdot d = 3 \\ \text{oder } a &= 6 + 5\cdot d\,. \end{aligned}$$

Es ergibt sich also eine Parameterdarstellung der Lösungsmenge mit einem Parameter d,

$$\mathbb{L} = \{(a|b|c|d) \in \mathbb{R}^4 \ (a|b|c|d) = (6+5d|-7-9d|-2-4d|d) \text{ mit } d \in \mathbb{R}\} \ .$$

Zur Kontrolle kann man leicht nachprüfen, dass z.B. $(6|-7|-2|0)$ eine Lösung ist (mit $d=0$) und ebenso $(1|2|2|-1)$ (mit $d=-1$). Kontrolle !

Wir fassen zusammen:

Gauß–Algorithmus (GA)

Ein $m \times n$ lineares Gleichungssystem bestehend aus m linearen Gleichungen in n Variabeln kann mit dem *Gauß—Algorithmus* gelöst werden.

1. Man schreibe das Gleichungssystem in Matrixform, d.h. Variabelnamen werden weggelassen, da diese keine Rolle spielen.

2. Man eliminiere die erste Variable aus der zweiten, dritten, $\ldots$, m–ten Gleichung durch Subtraktion geeigneter Vielfacher der ersten Gleichung von der zweiten, dritten, $\ldots$, m–ten Gleichung.

3. Ebenso die zweite, dritte, $\ldots$ Variable aus allen späteren Gleichungen eliminieren.

Allenfalls müssen vor den Schritten 2 und 3 Gleichungen vertauscht werden.
Nachdem nun ein aequivalentes Gleichungssystem in *Stufenform* vorliegt, können zwei Fälle eintreten:

4a) Es enstand eine Gleichung mit lauter Nullen als Koeffizienten links aber einem Koeffizienten ungleich Null rechts: *keine* Lösung.

4b) Falls der Fall 4a) nicht eintritt gibt es eine Parameterdarstellung der Lösungsmenge des Gleichungssystems mit $k = n-r$ frei wählbaren Parametern, wobei n die Anzahl Variabeln und r die Anzahl Gleichungen in der Stufenform ist (wobei die allenfalls entstandenenn Nullzeilen weggelassen werden). Eine solche Parameterdarstellung findet man durch *Rückwärtseinsetzen*.
Die Lösung ist *eindeutig*, falls $k=0$ und umgekehrt.

1.3 Lineare Gleichungssysteme in Ebene und Raum

Wir wollen nun noch speziell lineare Gleichungssysteme in zwei und drei Variabeln betrachten. Mit diesen können wir geometrisch anschauliche Vorstellungen verbinden.

1.3.1 Lineare Gleichung(ssysteme) in der Ebene

Wir beginnen nochmals mit einer linearen Gleichung in zwei Unbekannten

$$\boxed{a \cdot x + b \cdot y = c \ .}$$

Die Lösungsmenge einer solchen Gleichung ist *immer* eine Gerade *ausser*

— im Fall $a = b = c = 0$: alle $(x|y) \in \mathbb{R}^2$ sind Lösungen,

— im Fall $a = b = 0$ und $c \neq 0$: keine Lösungen.

Falls $b \neq 0$, so können wir umformen

$$\boxed{y = -\frac{a}{b} \cdot x + \frac{c}{b} = m \cdot x + q \ .}$$

Man nennt

— m die <u>*Steigung*</u> der Geraden, Steigung

— q den *y–Achsenabschnitt* der Geraden. y–Achsenabschnitt

Die Steigung einer Geraden gibt an, um wieviel der Wert y zu– oder abnimmt, wenn x um 1 zunimmt. Die Steigung m ist *positiv*, falls y zunimmt, *negativ* wenn y abnimmt. Die Gerade schneidet die y–Achse im Punkt $(0|q)$.

Beispiel

$$\boxed{5 \cdot x + 9 \cdot y = 18 \ .}$$

Die erwähnte Umformung ergibt hier

$$y = -\frac{5}{9} \cdot x + 2 \ .$$

Die entsprechende Gerade hat also Steigung $-5/9 = -0.\overline{5}$ und schneidet die y–Achse in $(0|2)$. Der Schnittpunkt mit der x–Achse ($y = 0$) liegt bei $(x|0) = (18/5|0)$ also bei $x = 3.6$. Damit lässt sich die Gerade — also die Punkte der Lösungsmenge in $\mathbb{R}^2$ — skizzieren, siehe unten. Wählt man y als freien Parameter, so ist

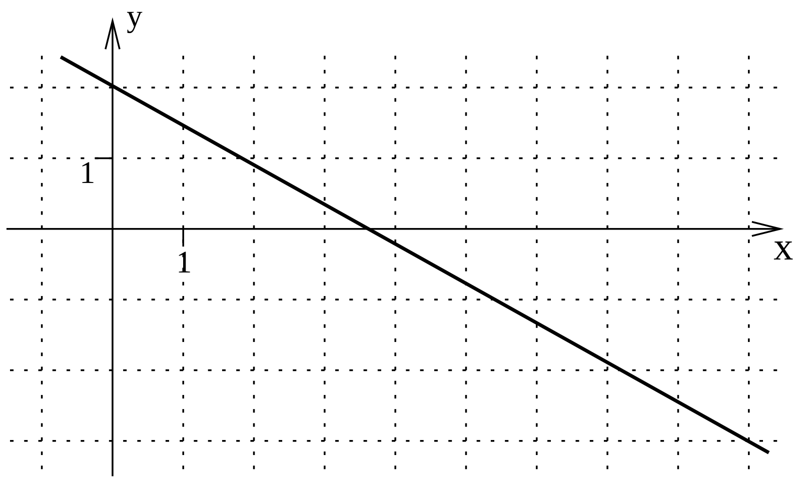
$$\mathbb{L} = \{\, (x|y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x|y) = (18/5 - (9/5) \cdot y|y) \text{ mit } y \in \mathbb{R} \,\}$$

eine mögliche Parameterdarstellung der Lösungsmenge. Etwas schöner ist

$$\mathbb{L} = \{ (x|y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x|y) = (-9t|2 + 5t) \text{ mit } t \in \mathbb{R} \} ,$$

wo y durch $y = 2 + 5t$ ersetzt wurde. Die obige Umformung schliesslich entspricht der Parameterdarstellung

$$\mathbb{L} = \{ (x|y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, (x|y) = (x| - (5/9) \cdot x + 2) \text{ mit } x \in \mathbb{R} \} .$$



Aufgabe
Zeichne die Lösungsmenge der Gleichung $3 \cdot x - 5 \cdot y = 7$ als Gerade in die obige Skizze ein und berechne den Schnittpunkt mit der bereits eingezeichneten Geraden. Gib dessen Koordinaten als gekürzte Brüche.

Lösung
Um die gegebene Gerade einzuzeichnen, kann man umformen

$$y = \frac{3x - 7}{5} = 0.6 \cdot x - 1.4 .$$

Man erhält eine Gerade mit Steigung $+0.6$ und y–Achsenabschnitt -1.4. Sie schneidet die x–Achse $y = 0$ bei $x = 2.\overline{3}$. Dies ermöglicht eine hinreichend gute Skizze von Hand. Besser ist allerdings, zu bemerken, dass die Punkte $(-1| - 2)$ und $(4|1)$ mit ganzzahligen Koordinaten auf dieser Geraden liegen, die man dann einfach mit einem Lineal verbindet.
Um den Schnittpunkt mit der bereits eingezeichneten Geraden zu berecnen, löst man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 5 \cdot x + 9 \cdot y &= 18 , \\ 3 \cdot x - 5 \cdot y &= 7 . \end{aligned}$$

Anstatt auch dieses Gleichungssystem wieder mit dem GA oder sonstwie zu lösen, lösen wir ein– für allemal das allgemeine 2×2–Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a \cdot x + b \cdot y &= e \;, \\ c \cdot x + d \cdot y &= f \;. \end{aligned}$$

Unter der Annhame $a \neq 0$ liefert uns der erste Schritt des GA

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & b & e \\ c & d & f \end{array} \right) \quad II) - \tfrac{c}{a} \cdot I) \quad \to \left(\begin{array}{cc|c} a & b & e \\ 0 & d - \dfrac{c}{a} \cdot b & f - \dfrac{c}{a} \cdot e \end{array} \right) .$$

Unter der Annahme $d - (c/a) \cdot b \neq 0$ liefert Rückwärtseinsetzen

$$y = \frac{f - \frac{c}{a} \cdot e}{d - \frac{c}{a} \cdot b} = \frac{a \cdot f - c \cdot e}{a \cdot d - b \cdot c}$$

und Einsetzen in die erste Gleichung liefert nach ein bisschen Doppelbruchumformung

$$x = \frac{e - b \cdot y}{a} = \frac{e - b \cdot \frac{a \cdot f - c \cdot e}{a \cdot d - b \cdot c}}{a} = \cdots = \frac{e \cdot d - f \cdot b}{a \cdot d - b \cdot c} \;.$$

Es stellt sich heraus, dass dies immer die eindeutige Lösung eines linearen 2×2–Gleichungssystems ist unter der einzigen

Bedingung für eindeutge Lösung eines 2×2–Systems

Bedingung

$$a \cdot d - b \cdot c \neq 0 \;.$$

(Die Annahme $a \neq 0$ oben z.B. ist also unnötig, da man andernfalls einfach die zwei Gleichungen vertauscht.) Dies ist also die Bedingung, dass die zwei Gleichungen in der Ebene zwei sich schneidende Geraden darstellen. Anderfalls schneiden sich die Geraden nicht (keine Lösung), liegen übereinander (unendlich viele Lösungen) oder mindestens eine der Gleichungen stellt gar keine Gerade dar (wenn z.B. $a = b = 0$ ist).

In der Aufgabe oben ist übringens $a = 5$, $b = 9$, $c = 3$, $d = -5$, $e = 18$ und $f = 7$ und deshalb die eindeutige Lösung (Schnittpunkt)

$$(x|y) = \left(\frac{18 \cdot (-5) - 7 \cdot 9}{5 \cdot (-5) - 9 \cdot 3} \middle| \frac{5 \cdot 7 - 3 \cdot 18}{5 \cdot (-5) - 9 \cdot 3} \right) = \left(\frac{153}{52} \middle| \frac{19}{52} \right) \approx (2.94|0.37) \;.$$

Wir betrachten nun noch folgendes

Gerade durch zwei Punkte

Problem

Gib die Gerade durch $(x_1|y_1)$ und $(x_2|y_2)$ in der Form $y = m \cdot x + q$.

Ist $x_1 \neq x_2$, so ist $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ die Steigung der Geraden (Skizze machen!). Also ist die gesuchte Gerade von der Form

$$y = m \cdot x + q = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x + q \ .$$

Setzt man x_1 für x ein, so muss $y = y_1$ herauskommen, da der Punkt $(x_1|y_1)$ auf der Geraden liegt. Dies legt q fest,

$$y = \underbrace{\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}_{m} \cdot x + \underbrace{\left(y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1\right)}_{q} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x + \frac{y_1 \cdot x_2 - y_2 \cdot x_1}{x_2 - x_1} \ .$$

Eine etwas symmetrischere Form der gesuchten Geradengleichung (bei der wir auch nicht $x_1 \neq x_2$ voraussetzen müssen) ist

Formel für Gerade durch zwei Punkte

$$(y_2 - y_1) \cdot x - (x_2 - x_1) \cdot y = x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1 \ .$$

Aufgabe

Wende diese Formel für die Gerade durch $(-1|-2)$ und $(4|1)$ an, die in der Aufgabe auf S.14 eine Rolle spielte.

1.3.2 Lineare Gleichung(ssysteme) im Raum

Wir beginnen mit *einer* lineare Gleichung in drei Variablen

$$a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d \ .$$

Beispiel

$$x + 4 \cdot y - 2 \cdot z = 22 \ .$$

Die Lösungsmenge dieser Gleichung hat z.B. die Parameterdarstellung

$$\mathbb{L} = \{\, (x|y|z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x|y|z) = (22 - 4y + 2z|y|z) \text{ mit } y, z \in \mathbb{R} \,\} \ .$$

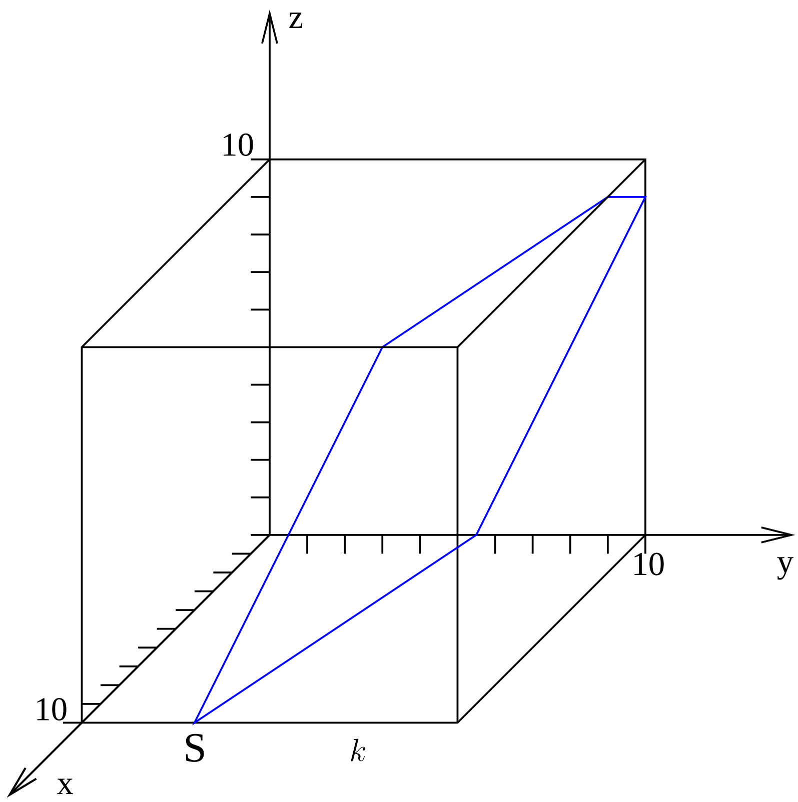
Veranschaulichung im Schrägbild

Die Intuition aus dem letzten Unterabschnitt sagt uns, dass die Lösungsmenge dieser Gleichung den Punkten einer Ebene E im Raum entspricht. Zur Veranschaulichung kann man oftmals die durch eine Ebenengleichung, z.B. die obige durch

Gleichung einer Ebene im Raum

$$E\colon x + 4 \cdot y - 2 \cdot z = 22 \ ,$$

festgelegte Ebene in einen Würfel z.B. der Kantenlänge 10 im Schrägbild einzeichnen.



Den Schnittpunkt S mit der Würfelkante $k = \{ (x|y|z) = (10|y|0) \,|\, 0 \le y \le 10 \}$ erhält man, indem man $x = 10$ und $z = 0$ in die Ebenengleichung einsetzt,

Punkte auf der Würfelkante

$$10 + 4 \cdot y - 2 \cdot 0 = 22 \;,$$

woraus sich $y = 3$ und somit $(x|y|z) = (10|3|0)$ für S ergibt. Ensprechend findet man auf der oberen vorderen Kante $k' = \{ (x|y|z) = (10|y|10) \,|\, 0 \le y \le 10 \}$ den Schnittunkt $(10|8|10)$. Bestimme die restlichen drei Schnitppunkte mit den Würfelkanten.

Als nächstes betrachten wir ein lineares 2×3–System.

Beispiel

$$\begin{aligned} 15 \cdot x + 10 \cdot y - 2 \cdot z &= \quad 70 \quad , \\ 5 \cdot x - 5 \cdot y + z &= \; -10 \quad . \end{aligned}$$

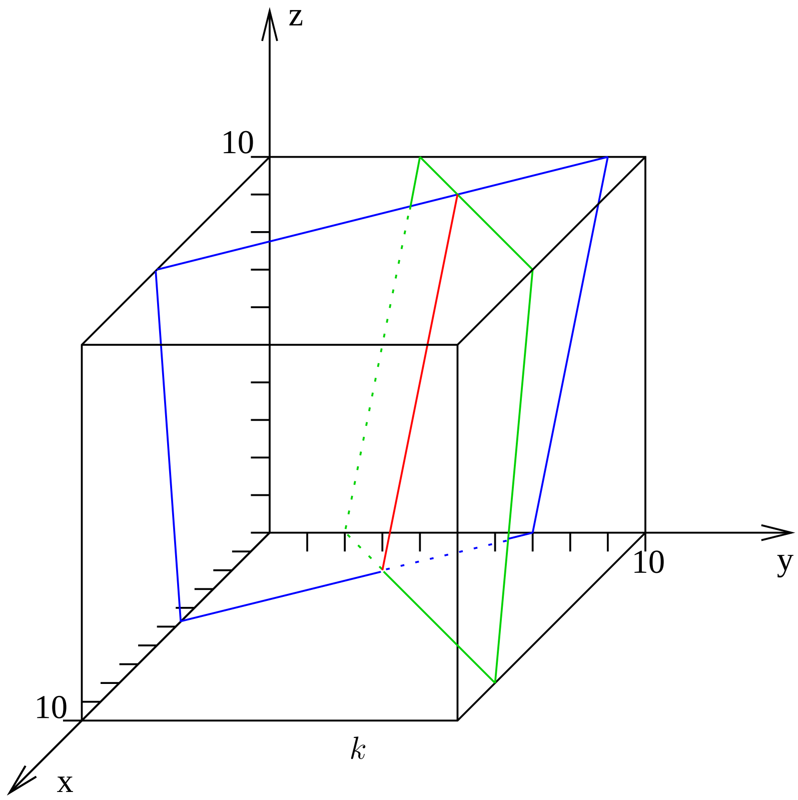
Gemäss GA subtrahieren wir ein Drittel der ersten Gleichung von der zweiten und erhalten

$$-\frac{25}{3} \cdot y + \frac{5}{3} \cdot z = -\frac{100}{3} \text{ oder } y = 4 + z/5 \;.$$

Einsetzen in die erste Gleichung ergibt $x = 2$. Also ist

$$\mathbb{L} = \{ (x|y|z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, (x|y|z) = (2|4 + z/5|z) \text{ mit } z \in \mathbb{R} \}$$

eine Parameterdarstellung der Lösungsmenge. Zur Veranschaulichung fassen wir die beiden Gleichungen wiederum als Ebenengleichungen auf. Die erste Gleichung z.B. hat Lösungen $(0|7|0)$, $(0|9|10)$, $(6|0|10)$, ... , die auch auf Kanten des Würfels mit Kantenlänge 10 wie oben liegen.



Für die zweite Gleichung finden sich Lösungen $(0|2|0)$, $(8|10|0)$, $(0|4|10)$, ... auf den Würfelkanten. Hat man diese beide Ebenen in den Würfel eingezeichnet, so kann ihre Schnittgerade, also die Punkte der Lösungsmenge $\mathbb{L}$ des 2×2–Systems ebenfalls veranschaulicht werden. Der Teil der Schnittgeraden, der innerhalb des Würfels liegt, wurde hier rot eingezeichnet. Insbesondere liegen die Lösungen $(2|4|0)$ und $(2|6|10)$ auf dieser Schnittgeraden. (Dies sind die Durchstosspunkte der Schnittgeraden durch den Würfel, nämlich durch dessen Boden bzw. Decke.) Der Teil der Schnittgeraden, der innerhalb des Würfels liegt, wurde hier rot eingezeichnet. Insbesondere liegen die Lösungen $(2|4|0)$ und $(2|6|10)$ auf dieser Schnittgeraden. (Dies sind die Durchstosspunkte der Schnittgeraden durch den Würfel, nämlich durch dessen Boden bzw. Decke.) Schnittgerade zweier Ebenen im Raum

Ganz analog lässt sich ein 3×3–System im Würfel veranschaulichen (wenn die Koeffizienten geeignet gewählt werden) mit der eindeutigen Lösung — falls eine solche exisitert — als Schnittpunkt *dreier* Ebenen.

Ebenfalls ganz analog zum Problem auf S.15 gibt es das Ebene durch drei Punkte im Raum

Problem

Gib die Ebene durch $(x_1|y_1|z_1)$, $(x_2|y_2|z_2)$ und $(x_3|y_3|z_3)$ in der Form

$$a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d \ .$$

(Drei Punkte im Raum, die nicht auf einer Geraden liegen, legen eine Ebene fest.)

Beispiel

Gib eine Gleichung für die Ebene durch die drei Punkte $(1|2|3)$, $(20|2)$ und $(1|-1|4)$.

Lösung

Wir suchen also Koeffiiezienten a, b, c und d, so dass die Gleichung

$$a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$$

Lösungen $(x|y|z) = (1|2|3)$, $(x|y|z) = (2|0|2)$ und $(x|y|z) = (1|-1|4)$ hat. Dies führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 \cdot a + 2 \cdot b + 3 \cdot c &= d \ , \\ 2 \cdot a + 0 \cdot b + 2 \cdot c &= d \ , \\ 1 \cdot a - 1 \cdot b + 4 \cdot c &= d \ . \end{aligned}$$

Dieses 3×4–System (drei lineare Gleichungen in vier Unbekannten) würden wir normalerweise so schreiben,

$$\begin{aligned} 1 \cdot a + 2 \cdot b + 3 \cdot c - d &= 0 \ , \\ 2 \cdot a + 0 \cdot b + 2 \cdot c - d &= 0 \ , \\ 1 \cdot a - 1 \cdot b + 4 \cdot c - d &= 0 \ , \end{aligned}$$

und wie gehabt mit dem GA lösen. Man findet

$$\mathbb{L} = \{\, (a|b|c|d) \in \mathbb{R}^4 \,|\, (a|b|c|d) = (5 \cdot t|t|3 \cdot t|16 \cdot t) \text{ mit } t \in \mathbb{R} \,\} \ .$$

Wählen wir z.B. $t = 1$, so erhalten wir die Ebenengleichung

$$5 \cdot x + y + 3 \cdot z = 16 \ .$$

(Setzt man $t = 0$, so erhält man natürlich keine Ebenengleichung.) Man prüft leicht nach, dass die drei oben vorgegebenen Punkte diese Gleichung erfüllen.
Wir werden später sehen, wie man diese Aufgabe (Ebene durch drei vorgegebene Punkte im Raum) etwas eleganter löst. So wollen wir hier die Diskussion mit diesem Beispiel bewenden lassen. elegantere Lösung später

Kapitel 2

Synthetische Geometrie

Im vorhergehenden Kapitel haben wir gesehen, wie geometrische Objekte und Probleme, also z.B. das Schneiden von Geraden, Ebenen, ... , via Koordinatensystem in algebraische Fragestellungen, z.B. nach den Lösungen eines linearen Gleichungssytems, übersetzt werden können. Man spricht von *analytischer Geometrie*. Führt man *keine* Koordinatensysteme ein und bleibt bei der Argumentation ganz innerhalb der Geometrie, so spricht man von *synthetischer Geometrie*. Dies ist also eine viel ältere Art und Weise, Geometrie zu betreiben, wie sie schon die alten Griechen betrieben hatten. Im letzten Kapitel wollen wir diese zwei Teilgebiete, also die Geometrie und ihre Übersetzung in die Algebra via Koordinatensysteme, zusammenfüren unter dem Dach der *linearen Algebra* (Rechnen mit Vektoren und Matrizen).

2.1 Kongruenzgeometrie

In der Kongruenzgeometrie betrachtet man Abbildungen, die Längen und Winkel erhalten, die also geometrische Figuren in kongruente Figuren abbilden.

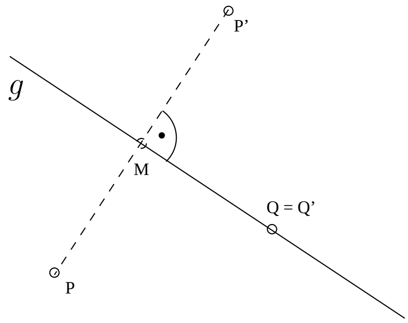
2.1.1 Geradenspiegelungen

Jede Gerade g in der Ebene definiert eine bijektive (also eine sowohl injektive als auch surjektive, also eine umkehrbare) Abbildung σ_g von der Ebene E auf sich. Dazu ist keinerlei Referenz zu einem Koordinatensystem nötig. Wir definieren diese Abbildung

$$\sigma_g \colon E \longrightarrow E$$

wie folgt. Sei P ein Punkt der Ebene E. Dann ist der Bildpunkt $P' = \sigma_g(P)$ von P unter dieser Abbildung gegeben durch

$$\sigma_g(P) = \begin{cases} P & \text{falls } P \in g \ , \\ P' & \text{so dass } g \text{ die Mittelsenkrechte von } \overline{PP'} \text{, falls } P \notin g \ . \end{cases}$$



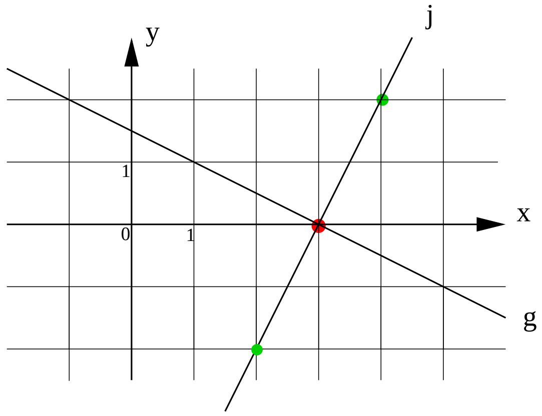
Wir geben diese Definition noch in Worten.

Definition Geradenspiegelung

Definition

Durch eine Gerade g in der Ebene wird eine *Geradenspiegelung* σ_g definiert. Dies ist eine bijektive Abbildung der Ebene auf sich, die die Punkte von g fest lässt und Punkte $P \notin g$ in Punkte $P' = \sigma_g(P)$ abbildet, so dass g die Mittelsenkrechte der Strecke $\overline{PP'}$ ist.

Beispiel



Betrachten wir die Gerade g von S.2. Die Geradenspiegelung σ_g an g bildet z.B. den Punkt $P(2|-2) \in j$ in den Punkt $P' = \sigma_g(P) = (4|2)$ ab, der wiederum auf j liegt, da j senkrecht auf g steht. Man sagt j sei eine *Fixgerade* der Abbildung σ_g , da sie unter der Abbildung σ_g auf sich geht. Der Punkt $(3|0) \in g \cap j$ ist sogar ein *Fixpunkt* der Abbildung, da er mit seinem Bildpunkt unter σ_g übereistimmt. Dies trifft auf jeden Punkt von g zu. Man sagt, g sei eine *Fixpunktgerade* der Abbildung σ_g , da sie aus lauter Fixpunkten besteht (und deshalb *a fortiori* eine Fixgerade ist). Die Geraden g und alle Geraden senkrecht zu g sind also Fixgeraden der Spiegelung σ_g, jedoch nur g selbst ist sogar Fix*punkt*gerade.
Mit Hilfe des Koordinatensystems kann man die Abbildung σ_g auch durch Formeln angeben:

$$\sigma_g\colon (x|y) \longmapsto (x'|y') \ ,$$

mit

$$\begin{aligned} x' &= \frac{3}{5} \cdot x - \frac{4}{5} \cdot y + \frac{6}{5} \ , \\ y' &= -\frac{4}{5} \cdot x - \frac{3}{5} \cdot y + \frac{12}{5} \ . \end{aligned}$$

Man möge Punkte $(2|-2)$, $(3|0)$, ... einsetzen und mit der Graphik oben vergleichen, um diese Formeln zu überprüfen. Für einen Fixpunkt $(x|y)$ gilt offenbar $(x'|y') = (x|y)$. Dies führt auf das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x &= \frac{3}{5}\cdot x - \frac{4}{5}\cdot y + \frac{6}{5}\ , \\ y &= -\frac{4}{5}\cdot x - \frac{3}{5}\cdot y + \frac{12}{5}\ , \end{aligned}$$

oder — etwas umgeformt,

$$\begin{aligned} \frac{2}{5}\cdot x + \frac{4}{5}\cdot y &= \frac{6}{5}\ , \\ \frac{4}{5}\cdot x + \frac{8}{5}\cdot y &= \frac{12}{5}\ . \end{aligned}$$

Beide diese Gleichungen sind (nach Multiplikation mit 5/2 bzw. mit 5/4) sind aequivalent zur Geradengleichung von g (vgl. S.1),

$$g\colon x + 2\cdot y = 3\ .$$

Die Fixpunkte der Abbildung sind also genau die Punkte von g.

Eigenschaften von Geradenspiegelungen

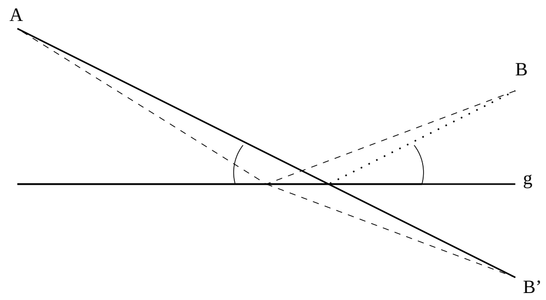
Eigenschaften von Geradenspiegelung

- Für Geradenspiegelungen σ_g gilt $\sigma_g \circ \sigma_g = \mathbb{I}$ (Identität).
  Die Umkehrabbildung einer Geradenspiegelung σ_g ist also σ_g, also: $\sigma_g^{-1} = \sigma_g$.
- Geradenspiegelungen sind *Kongruenzabbildungen*, d.h. sie erhalten Längen und Winkel. (Wenn sie alle Längen erhalten so *a fortiori* auch alle Winkel.)
- Geradenspiegelungen sind *orientierungsumkehrend* oder *gegensinnig*, d.h. Bilder von im Gegenuhrzeigersinn beschrifteten Dreiecken sind im Uhrzeigersinn beschriftete und umgekehrt.

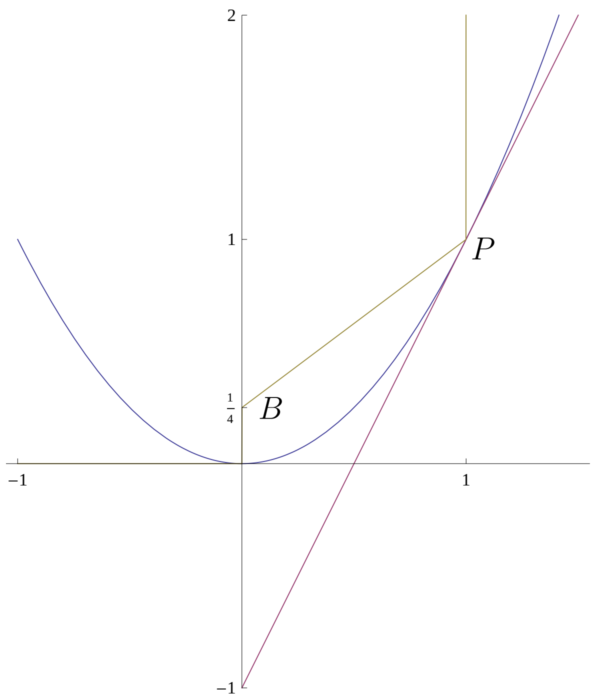
Für die letzte Eigenschaft betrachte man z.B. das Dreieck MPQ in der Skizze auf S.21 und sein Bild $M'P'Q' = MP'Q$ unter σ_g.

Geradenspiegelungen spielen nicht nur in der Geometrie eine eminent wichtige Rolle und allgemein in der Mathematik, sondern auch in der Physik, in der Natur, im Ingenieurwesen, ... Man denke etwa an die (beinahe–)Spiegelsymmetrie eines Blattes oder des menschlichen Körpers.

Exkurs:



Wie gelangt ein Lichtstrahl von A über den Spiegel g nach B ?
Das *Reflexionsgesetz* sagt so, dass die beiden eingezeichneten Winkel gleich gross sind (Einfallswinkel = Ausfallswinkel) — also nicht etwa längs des gestrichelten Pfades. Die Geradenspiegelung des Punktes B an g nach B' zeigt klar, dass so der Weg von A nach B über g der kürzestmögliche ist, also z.B. kürzer als längs des gestrichelten Weges.
Dieses Reflexionsgesetz findet dann im Ingenieurwesen seine Anwendung.



In der Figur links trifft ein Lichtstrahl längs der Geraden $x = 1$ auf die verspiegelte Parabel $y = x^2$ und wird im Punkt $P(1|1)$ reflektiert. Um das Reflexionsgesetz anzuwenden, kann man die gekrümmte Spiegelfläche durch die Tangente $y = 2x - 1$ durch den Punkt P ersetzen.
Der Lichtstrahl wird dann in den sog. *Brennpunkt* $B(0|1/4)$ der Parabel abgelenkt.
Durch das Reflexionsgesetz werden auch alle anderen senkrecht einfallenden Lichtstrahlen nach B abgelenkt. Deshalb wird es in B auch ganz schön heiss ...

Aufgabe

Beweise, dass $y = 2x - 1$ die Tangente an die Kurve $y = x^2$ im Punkt $P(1|1)$ ist und dass das Reflexionsgesetz den Lichtstrahl nach $B(0|1/4)$ abelenkt.

Lösung

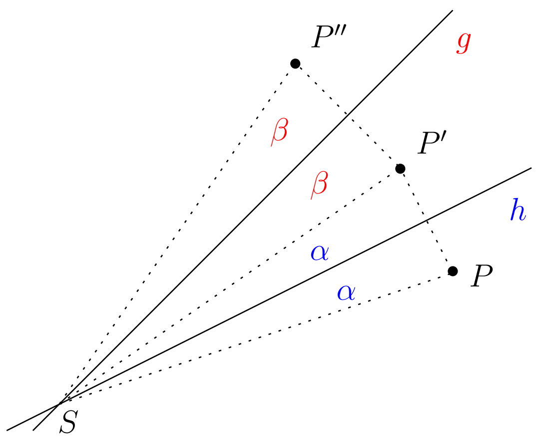
Die Gerade $y = 2x - 1$ hat mit der Kurve $y = x^2$ genau den Punkt $P(1|1)$ und keinen anderen gemeinsam.
Nach Pythagoras ist $\overline{|BP|} = 5/4$ und deshalb müsste $B'(1|-1/4)$ der an der Tangente gespiegelte Punkt B sein. Da BB' senkrecht zur Tangente ist, ist dies der Fall.

2.1.2 Verknüpfungen von zwei Geradenspiegelungen

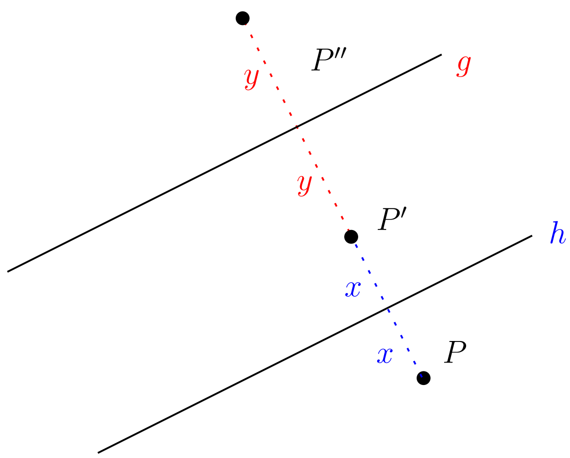
Gibt man sich zwei Geraden g und h in der Ebene, so kann man die *Verknüpfung* $\sigma_g \circ \sigma_h$ der zwei Geradenspieglungen σ_g und σ_h betrachten. In dieser Notation ist implizit, dass *zuerst* σ_h und *danach* σ_g ausgeführt wird,

$$\sigma_g \circ \sigma_h(P) = \sigma_g(\sigma_h(P)) \ .$$

Beispiel

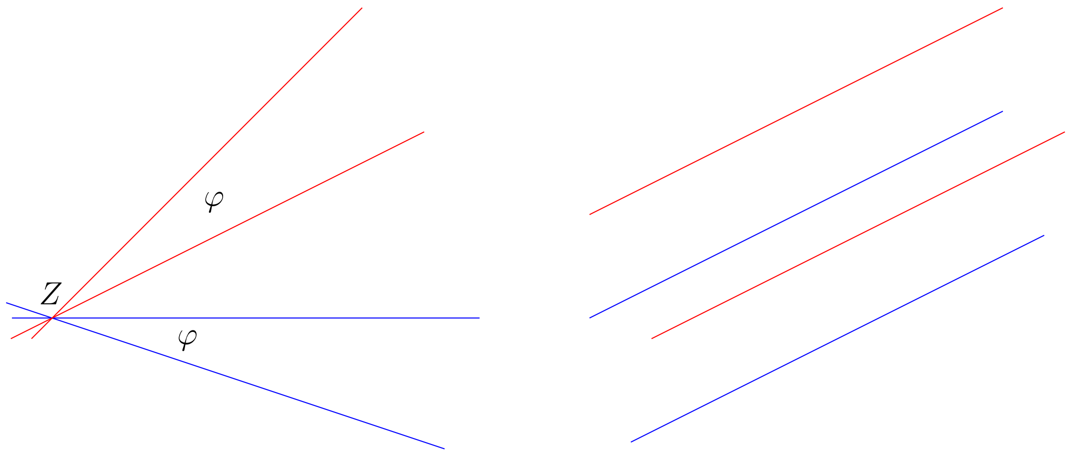


Aus dieser Skizze geht hervor:
Spiegelt man einen Punkt P an zwei Geraden (zuerst an h, $\sigma_h(P) = P'$, und dann an g, $\sigma_g(P') = P''$), die sich in einem Punkt S schneiden und einen Winkel $\gamma(= \alpha + \beta)$ einschliessen, so resultiert insgesamt eine *Drehung* mit Drehzentrum S um den Winkel 2γ.
Was erhalten wir, wenn sich die zwei Geraden nicht schneiden?
Beispiel



Aus der Skizze geht hervor:
Spiegelt man einen Punkt P an zwei parallelen Geraden, so resultiert insgesamt eine *Verschiebung* senkrecht zu den Geraden um $2(x + y)$, den doppelten Abstand der Geraden.

Umgekehrt lässt sich jede Drehung $\delta_{Z,\varphi}$ um einen Drehwinkel φ mit Drehzentrum Z durch zwei Geradenspiegelungen erzeugen. Solange die zwei Geraden sich im Z schneiden und einen Winkel $\varphi/2$ einschliessen, erzeugen sie die gleiche Drehung.
Ebenso lässt sich jede Verschiebung $\vec{v}$ durch zwei Spiegelungen an zwei Geraden erzeugen, die senkrecht zur Verschiebungsrichtung stehen und den halben Abstand der Verschiebedistanz haben. [1]



Das rote Geradenpaar links erzeugt also die Gleiche Drehung mit Drehzentrum Z und Drehwinkel 2φ wie das blaue Geradenpaar links, da sie sich im gleichen Punkt schneiden und den gleichen Winkel einschliessen.
Ebenso erzeugt das rote Geradenpaar rechts die gleiche Verschiebung, wie das blaue Geradenpaar rechts, da die Geraden in die gleiche Richtung zeigen und den gleichen Abstand haben.
In beiden Fällen ist auf die Reihenfolge der Geradenspiegelungen zu achten. Ist zum Beispiel $\sigma_g \circ \sigma_h = \delta_{Z,\varphi}$ die Verknüpfung zweier Geradenspiegelungen an Geraden, die sich in $Z = g \cap h$ schneiden und einen Winkel $\varphi/2$ einschliessen, so ist $\sigma_h \circ \sigma_g = \delta_{Z,-\varphi}$ die Umkehrabbildung, also eine Drehung mit gleichem Zentrum Z und Drehwinkel $-\varphi$. Man kann dies auch nachrechnen,

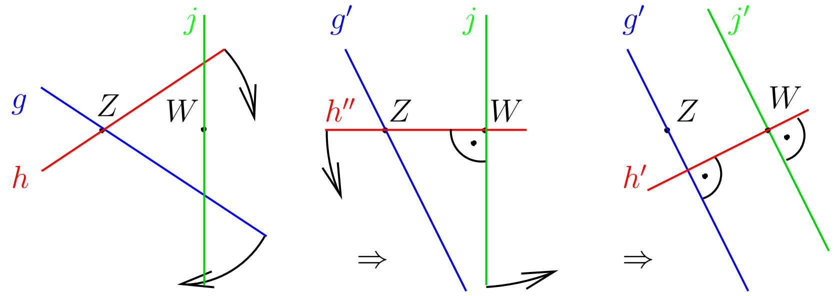
$$(\sigma_g \circ \sigma_h) \circ (\sigma_h \circ \sigma_g) = \sigma_g \circ (\underbrace{\sigma_h \circ \sigma_h}_{=\mathbb{I}}) \circ \sigma_g = \sigma_g \circ \sigma_g = \mathbb{I} \ .$$

Diese Rechnung besagt, dass $\sigma_h \circ \sigma_g$ die Umkehrabbildung von $\sigma_g \circ \sigma_h$ ist, also $(\sigma_g \circ \sigma_h)^{-1} = \sigma_h \circ \sigma_g$. Dabei haben wir verwendet, dass das Verknüpfen von Abbildungen assoziativ ist und dass das Verknüpfen einer Geradenspiegelung mit sich selbst die Identität ist, also Eigenschaft 1 auf S.22. Wir wollen nun untersuchen, was herauskommt, wenn wir drei oder mehr Geradenspiegelungen miteinander verknüpfen. Es wird sich zeigen, dass nur noch ein weiterer Typ von Kongruenzabbildungen hinzukommt.

[1] Man charakterisiert eine Verschiebung durch einen sog. *Vektor* $\vec{v}$, einen Pfeil in Richtung der Verschiebung mit einer Länge, die der Verschiebedistanz entspricht. Mehr über Vektoren später.

2.1.3 Verknüpfung von mehr als zwei Geradenspiegelungen

Da eine Geradenspiegelung die Orientierung umkehrt (Eigenschaft 3 auf S.22) ergibt also die Verknüpfung von zwei (oder einer geraden Anzahl von) Geradenspiegelungen eine *gleichsinnige* Kongruenzabbildung (Drehung oder Verschiebung) und die Verknüpfung von drei (oder einer ungeraden Anzahl von) Geradenspiegelungen immer eine *ungleichsinnige* Kongruenzabbildung. Es stellt sich heraus, dass nur noch der Fall von drei Geradenspiegelungen etwas Neues mit sich bringt. Wir untersuchen dazu die Verknüpfung dreier Geradenpsigelungen $\sigma_j \circ \sigma_h \circ \sigma_g$, zuerst an g, dann an h und schliesslich an j.



Das Ziel ist es nun, die drei Geraden in allgemeiner Lage durch andere zu ersetzen, so dass wir besser sehen, was für eine Abbildung $S = \sigma_j \circ \sigma_h \circ \sigma_g$ ist.
In einem ersten Schritt stellen wir die Drehung $\sigma_h \circ \sigma_g$ durch ein anderes Geradenpaar, nämlich g' und h'' dar. Wie wir gesehen haben ist dies möglich, solange sie sich im gleichen Punkt Z schneiden wie g und h und den gleichen Winkel einschliessen.

$$\sigma_j \circ (\sigma_h \circ \sigma_g) = \sigma_j \circ (\sigma_{h''} \circ \sigma_{g'})$$

Ziel dieses ersten Schrittes war es zu erreichen, dass h'' *senkrecht* auf die dritte Gerade j zu liegen kommt. In einem zweiten Schritt ersetzen wir nun analog das Geradenpaar h'' und j in der Drehung $\sigma_j \circ \sigma_{h''}$ (die eine Punktspiegelung an W ist, da der Drehwinkel nun $180° = 2 \cdot 90°$ beträgt) durch h' und j', so dass h' nun zusätzlich *senkrecht* auf g' zu liegen kommt,

$$(\sigma_j \circ \sigma_{h''}) \circ \sigma_{g'} = (\sigma_{j'} \circ \sigma_{h'}) \circ \sigma_{g'}$$

Insgesamt haben wir nach diesen zwei Schritten also folgende Gleichungskette,

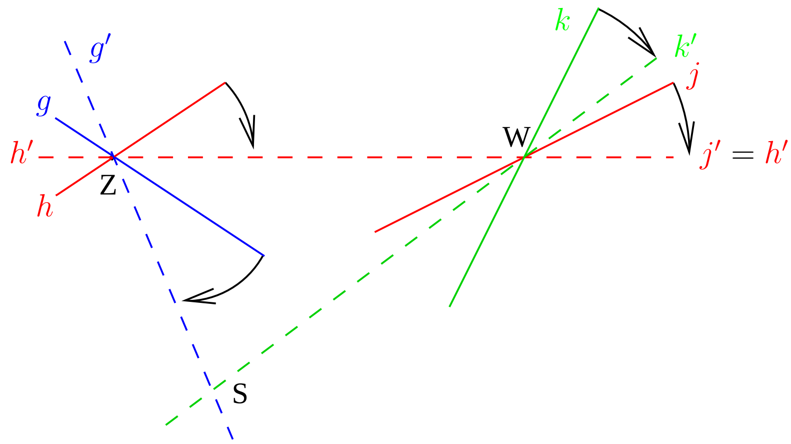
$$S = \sigma_j \circ \sigma_h \circ \sigma_g = \sigma_j \circ \sigma_{h''} \circ \sigma_{g'} = \sigma_{j'} \circ \sigma_{h'} \circ \sigma_{g'} \ .$$

Da die drei Geraden g', h' und j' nun so schön geordnet zueinander liegen, lässt sich auch gut verfolgen, was passiert, wenn ein Punkt zuerst an g', dann an h' und schliesslich an j' gespiegelt wird. Er wird in Richtung h' verschoben, und zwar um den doppelten Abstand von g' nach j' und anschliessend noch an h' gespiegelt. Man spricht von einer *Schubspiegelung* S. Eine solche ist festgelegt durch eine *Spiegelungsgerade* und eine *Verschiebung in Richtung dieser Gerade*.

Wegen der speziellen Lage der drei Geperaden (zwei Geraden stehen senkrecht zur dritten) kann man die Reihenfolge der drei Spiegelungen auch verschieden wählen. Es gilt

$$S = \sigma_{j'} \circ \sigma_{h'} \circ \sigma_{g'} = \sigma_{h'} \circ \sigma_{j'} \circ \sigma_{g'} = \sigma_{j'} \circ \sigma_{g'} \circ \sigma_{h'} \text{ (aber z.B. } \neq \sigma_{g'} \circ \sigma_{j'} \circ \sigma_{h'}).$$

Dass bei der Verknüpfung von vier (oder mehr) Geradenspiegelungen nichts Neues mehr herauskommt, wollen wir an der Verknüpfung von zwei Drehungen (die ja je durch zwei Geradenspiegelungen erzeugt werden können) untersuchen.



Wir betrachten also eine Verknüpfung $\sigma_k \circ \sigma_j \circ \sigma_h \circ \sigma_g$ von vier Geradenspiegelungen, wobei sich die Geraden g, h, j und k anfänglich in allgemeiner Lage befinden sollen. Wir ersetzen nun das Geradenpaar (g, h) durch das Paar (g', h'), das sich im gleichen Punkt Z schneidet und den gleichen Winkel einschliesst, so dass die Drehung $\sigma_h \circ \sigma_g$ mit $\sigma_{h'} \circ \sigma_{g'}$ übereinstimmt. Ziel dieses ersten Schrittes ist es, dass die Gerade h' so zu liegen kommt, dass sie auch durch den Schnittpunkt W von j und k geht. In einem analogen zweiten Schritt ersetzen wir nun das Geradenpaar (j, k) durch (j', k') mit gleichem Schnittpunkt W und gleichem eingeschlossenen Winkel, so dass j' zusätzlich durch Z geht, also mit h' übereinstimmt. Damit haben wir

$$(\sigma_k \circ \sigma_j) \circ (\sigma_h \circ \sigma_g) = (\sigma_{k'} \circ \sigma_{j'}) \circ (\sigma_{h'} \circ \sigma_{g'}) = \sigma_{k'} \circ \underbrace{(\sigma_{j'} \circ \sigma_{h'})}_{=\mathbb{I}} \circ \sigma_{g'} = \sigma_{k'} \circ \sigma_{g'} \ .$$

Durch unsere Manipulationen „kürzen sich also die mittleren beiden Geradenspiegelungen heraus“ und es ergibt sich eine Drehung mit dem Schnittpunkt $S = g' \cap k'$ als Zentrum. Der Drehwinkel dieser Drehung $\sigma_{k'} \circ \sigma_{g'} = \sigma_k \circ \sigma_j \circ \sigma_h \circ \sigma_g$ ist nach dem Aussenwinkelsatz im Dreieck SWZ die Summe der Drehwinkel von $\sigma_h \circ \sigma_g$ und $\sigma_k \circ \sigma_j$. Verknüpft man also zwei Drehungen (nich unbedingt mit gleichem Zentrum), so addieren sich deren Drehwinkel. Ist die Summe der beiden Drehwinkel ein ganzzahliges Vielfaches von 2π, so ist diese Verknüpfung eine Verschiebung (g' und k' sind dann parallel). Ganz analog weist man nach, dass die Verknüpfung einer Verschiebung mit einer Drehung wieder eine Drehung, und mit einer Verschiebung wieder eine Verschiebung ist.

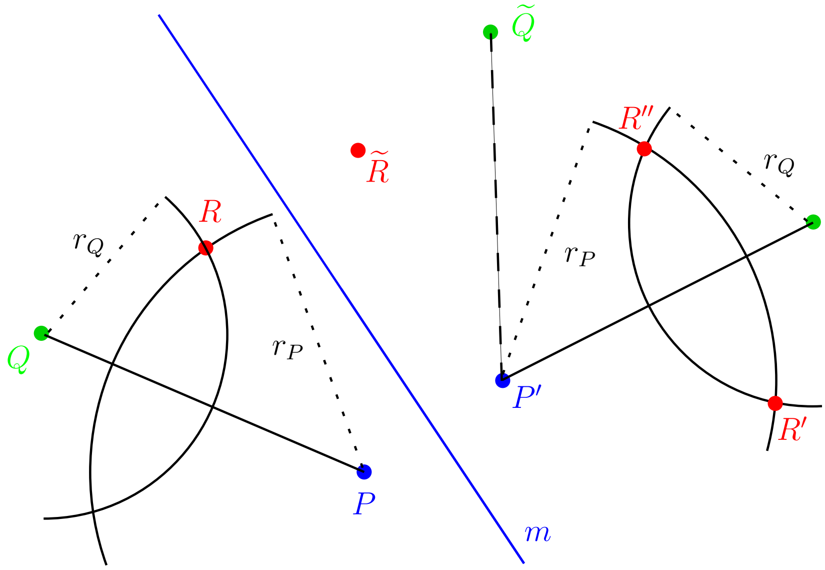
Aufgabe Um $(0|0)$ werden zunächst mit Drehwinkel $30°$ und dann um $(10|10)$ mit Drehwinkel $-90°$ gedreht. Konstruiere und berechne das Zentrum der resultierenden Drehung. Konstruiere und berechne den Bildpunkt von $P(10|0)$.

2.1.4 Klassifikation der ebenen Kongruenztransformationen

Definition Kongruenz/Isometrie

Eine *Kongruenz*(*–transformation*, *–abbildung*) oder *Isometrie* der Ebene ist eine *bijektive* (also *umkehrbare*) Abbildung der Ebene auf sich, die alle Abstände zwischen zwei Punkten (und deshalb auch alle Winkel) unverändert lässt.

Wir werden nun nachweisen, dass jede Kongruenz in der Ebene sich durch *höchstens drei* Geradenspiegelungen erzeugen lässt. Da wir bereits untersucht haben, was bei solchen Verknüpfungen von Geradenspiegelungen herauskommt, wird dies zu einer Klassifikation *aller* Kongruenztransformationen der Ebene führen.



Wir nehmen also an, die Punkte P und Q werden durch eine Kongruenz nach P' bzw. Q' abgebildet, so dass $|\overline{PQ}| = |\overline{P'Q'}|$ gilt. Der Bild eines dritten Punktes R ist dann R' oder R'', da die Abstände r_P und r_Q erhalten bleiben. Wir spiegeln nun P an der Mittelsenkrechten m von $\overline{PP'}$. Dabei gehe Q nach $\widetilde{Q}$ und R nach $\widetilde{R}$. Spiegelt man nun ein weiteres Mal und zwar an der Mittelsenkrechten von $|Q\widetilde{Q}|$, so bleibt P' fix, da diese durch P' geht. (P', Q' und $\widetilde{Q}$ bilden ein gleichschenkliges Dreieck.) Unter dieser zweiten Spiegelung geht $\widetilde{R}$ nach R' und wir sind fertig, wenn R' tatsächlich das Bild von R unter unserer Kongruenzabbildung ist. Denn die Bilder aller weiteren Punkte $S, T \ldots$ sind dann durch ihre Abstände von P', Q' und R' festgelegt. Falls das Bild von R jedoch R'' ist, dann liegt eine gegensinnige Abbildung vor und wir müssen ein drittes Mal spiegeln, nämlich an der Geraden $P'Q'$. Wären nach einer Spiegelung an m bereits alle Punkte am richtigen Ort, so läge eine Geradenspiegelung vor.
Da wir untersucht haben, welche Abbildungen sich ergeben als Verknüpfung von einer, zwei oder drei Geradenspiegelungen, haben wir also folgenden

Satz (Klassifikation der Kongruenzen der Ebene) Klassifikation

Jede Kongruenztransformation der Ebene ist eine *Drehung*, *Verschiebung* oder *Schubspiegelung*. (Darin sind *Geradenspiegelungen* und die *Identität* als Spezialfälle enthalten.)

Da wir auch wissen, wie alle diese Kongruenzen durch Verknüpfungen von Geradenspieglungen erzeugt werden können, haben wir noch den

Folgesatz

— Eine *gleichsinnige* Kongruenztransformation der Ebene ist eine *Drehung* oder eine *Verschiebung* und kann durch *zwei* Geradenspiegelungen erzeugt werden (oder es ist die Identität).
— Eine *ungleichsinnige* Kongruenztransformation der Ebene ist eine *Schubspiegelung* und kann durch *drei* Geradenspiegelungen erzeugt werden (oder *eine*, falls es eine Geradenspiegelung ohne anschliesende Verschiebung ist).

Überlege

— Welche Kongruenzen haben Fixpunkte?

— Welche Kongruenzen haben Fixgeraden? Wie liegen diese?

— Gibt es Drehungen mit Fixgeraden?

— Welche Kongruenzen haben sogar Fix*punkt*geraden?

Eine *Kongruenz* oder *Iometrie* der Ebene lässt definitionsgemäss alle Längen (und deshalb auch alle Winkel) unverändert. In diesem Zusammenhang gibt es noch folgende wichtige

Definition kongruente Figuren

Zwei ebene geometrische Figuren heissen *kongruent*, wenn es eine Kongruenztransformation der Ebene gibt, die die eine Figur in die andere überführt.

Aus Gründen der Vollständigkeit führen wir hier die *Kongruenzsätze* für Dreiecke auf, die wir aber nicht beweisen.

Kongruenzsätze für Dreiecke Kongruenzsätze

Zwei Dreiecke sind kongruent,
SSS: falls sie in drei Seiten oder
SWS: falls sie in wei Seiten und dem eingeschlossenen Winkel oder
WSW: falls sie in einer Seite und zwei anliegenden Winkeln oder
SsW: falls sie in zwei Seiten und dem der längeren Seite gegenüberligenden Winkel übereinstimmen.

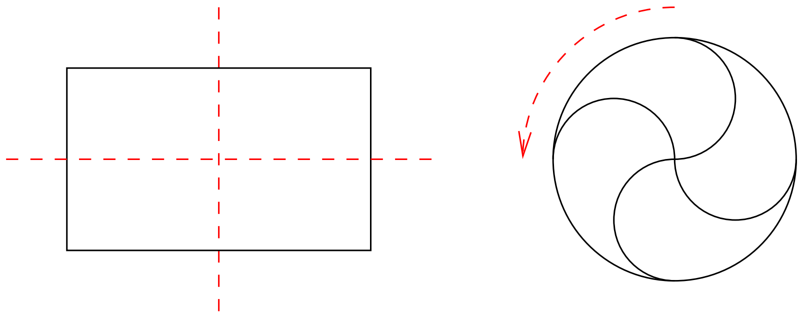
Wichtig ist in diesem Zusammenhang, dass zwei Dreiecke in zwei Seiten und einem Winkel übereinstimmen können, ohne kongruent zu sein!

Aufgabe:
Skizziere ein reguläres Fünfeck. Zeige dass die zwei gleichschenkligen Dreiecke ssd, gebildet aus zwei benachbarten Fünfeckseiten s und einer Fünfeckdiagonalen d, und sdd, gebildet aus einer Seite und zwei anliegenden Diagonalen, nur den der *kürzeren* Dreiecksseite s gegenüberliegenden Winkel (und offensichtlich zwei Seiten) gemeinsam haben.

2.2 Symmetrien

2.2.1 Symmetriegruppen

Wir betrachten die zwei geometrischen Figuren



und fragen uns, welche Kongruenztransformationen diese Figuren auf sich abbilden. Beim Rechteck gibt es neben der Identität die Spiegelung an der vertikalen und die Spiegelung an der horizontalen Symmetrieachse, sowie eine Drehung um 180°. Bei der Figur rechts gibt es nur gleichsinnige Kongruenztransformationen, nämlich neben der Identität die Drehungen um 90°, 180° und um 270°. Obwohl die sog. *Symmetriegruppen* dieser zwei Figuren also beide vier Elemente aufweisen, unterscheiden sie sich grundsätzlich voneinander. Jede Symmetrie, also Kongruenztransformation, die das Rechteck auf sich abbildet hat die Eigenschaft, dass sie, zweimal hintereinander ausgeführt, die Identität ergibt. Dies ist bei der Figur rechts z.B. bei einer Drehung um 90° nicht der Fall. Zur Unterscheidung verschiedener Symmetriegruppen gehören also die Verknüpfungseigenschaften ihrer Elemente ganz wesentlich dazu. Diese Verknüpfungseigenschaften werden in einer Tabelle zusammengefasst, ähnlich einer Multiplikationstabelle natürlicher Zahlen aus der Primarschule. Ein Beispiel für eine solche Tabelle findet sich weiter unten.

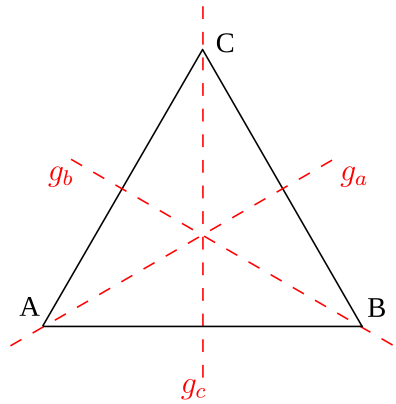
Definition[2]

Symmetriegruppe

Kongruenzabbildungen, die eine geometrische Figur in sich überführen, nennt man *Symmetrien* dieser Figur. Die Gesamtheit dieser Kongruenzabbildung bilden eine Gruppe unter der Verknüpfungsoperation von Abbildungen, die *Symmetriegruppe* der Figur.

Wir betrachten einmal die Symmetriegruppe eines gleichseitigen Dreiecks. Neben der Indentität $\mathbb{I}$ gibt es zwei Drehungen, nämlich um 120° und um 240° (gleichsinnig) sowie drei Geradenspiegelungen σ_a , σ_b und σ_c (gegensinnig), insgesamt also 6 Kongruenztransformationen, die das gleichseitige Dreieck auf sich abbilden.

[2]Siehe *Grundbegriffe der Mathematik,* Kap.4.3, besonders Beispiel 6 auf S.82.



Die „Multiplikationstabelle“ sieht dann wie folgt aus

	$\mathbb{I}$	$D_{120°}$	$D_{240°}$	σ_a	σ_b	σ_c
$\mathbb{I}$	$\mathbb{I}$	$D_{120°}$	$D_{240°}$	σ_a	σ_b	σ_c
$D_{120°}$	$D_{120°}$	$D_{240°}$	$\mathbb{I}$	σ_c	σ_a	σ_b
$D_{240°}$	$D_{240°}$	$\mathbb{I}$	$D_{120°}$	σ_b	σ_c	σ_a
σ_a	σ_a	σ_b	σ_c	$\mathbb{I}$	$D_{120°}$	$D_{240°}$
σ_b	σ_b	σ_c	σ_a	$D_{240°}$	$\mathbb{I}$	$D_{120°}$
σ_c	σ_c	σ_a	σ_b	$D_{120°}$	$D_{240°}$	$\mathbb{I}$

und ist folgendermassen zu lesen. Das Resultat der Verknüpfung $D_{120°} \circ \sigma_a$, also der Geradenspiegelung an g_a (zuerst) gefolgt von der Drehung $D_{120°}$ um 120° (im positiven, also Gegenuhrzeigersinn) findet sich in der Spalte, die mit σ_a und in der Zeile, die mit $D_{120°}$ angeschrieben ist und ist σ_c. Hier kommt es also auf die Reihenfolge der Verknüpfung an im Gegensatz zu den zwei Figuren, die weiter oben betrachtet wurden, deren Symmetriegruppen *kommutativ* sind.

Überlege:

Welche Eigenschaft einer „Multiplikationstabelle“ entspricht der Kommutativität?

Statt der geometrischen Beschreibung der 6 Symmetrien des gleichseitigen Dreiecks würde auch die Angabe der Bilder der einzelnen Ecken genügen. Da die Geradenspiegelung σ_a an der Gerade g_a die Ecke A in sich überführt und die Ecken B und C vertauscht und da die Drehung um 120° die Ecken $A \to B \to C \to A$ überführt, können diese zwei Symmetrien inklusive ihrer Verknüpfung folgendermassen repräsentiert werden,

$$\sigma_a \leftrightarrow \begin{pmatrix} A & B & C \\ A & C & B \end{pmatrix} , \ D_{120°} \leftrightarrow \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & C & A \end{pmatrix} , \ D_{120°} \circ \sigma_a \leftrightarrow \begin{pmatrix} A & B & C \\ B & A & C \end{pmatrix}$$

und man liest ab, dass die letzte Zuordnung der Ecken der Spiegelung σ_c entspricht. Allgemein nennt man solche Vertauschungen (hier von Ecken) auch *Permutationen*.

Schliesslich könnte man diese Symmetrien, die nach Definition ja Kongruenzabbildungen der Ebene sind, in einem Koordinatensystem auch durch Zuordnungen $(x|y) \longmapsto (x'|y')$ von Punkt und Bildpunkt rechnerisch angeben, davon später.

2.2.2 Bandornamente

Da jede Kongruenztransformation der Ebene aus (höchstens drei) Geradenspiegelungen zusammengesetzt werden kann, wollen wir diese hier als „Grundbausteine“ betrachten und als Anwendung die Symmetriegruppen von Bandornamenten analysieren. Dabei wird sich die Darstellung von Kongruenzen als Kombination von Geradenspiegelungen als nützlich erweisen.
Unter der *Symmetriegruppe* $\mathcal{G}_\mathcal{F}$ einer geometrischen Figur $\mathcal{F}$ verstehen wir gemäss Definition auf S.30 die Gesamtheit aller Kongruenztransformationen, die $\mathcal{F}$ auf sich abbilden. Wenn k_1 und k_2 zwei Kongruenzen in $\mathcal{G}_\mathcal{F}$ sind, so ist die Verknüpfung $k_2 \circ k_1$ (Hintereinanderausführung) wiederum eine Kongruenz in $\mathcal{G}_\mathcal{F}$. Die Resultate solcher Verknüpfungen haben wir im vorangehenden Unterabschnitt z.B. in einer „Multiplikationstabelle“ festgehalten.
Klar ist auch, dass eine in der Ebene nur endlich ausgedehnte geometrische Figur $\mathcal{F}$ keine Translation (Verschiebung) als Symmetrie haben kann (mit Ausnahme der Identität), denn eine Verschiebung $\neq \mathbb{I}$ bildet kein endliches Gebiet auf sich ab.

Definition Bandornament

Ein *Bandornament* ist eine (undendlich ausgedehnte) geometrische Figur $\mathcal{B}$ in der Ebene, deren Symmetriegruppe $\mathcal{G}_\mathcal{B}$ eine Verschiebung $t_1 \neq \mathbb{I}$ enthält, so dass jede Verschiebung $t \in \mathcal{G}_\mathcal{B}$ eine n–fache Verkettung von t_1 oder ihrer Inversen t_1^{-1} ist.
In Symbolen;
$t = t_1^n := t_1 \circ \ldots t_1$ (n–mal) oder $t = t_1^{-n} = t_1^{-1} \circ \cdots \circ t_1^{-1}$ (n–mal), oder zusammengefasst, $t = t_1^n$ für ein $n \in \mathbb{Z}$.
Die Verschiebungsrichtung von t_1 nennen wir die *horizontale* Richtung.

Bemerkung zu dieser Definition
Eine Gerade ist *kein* Bandornament, da ihre Symmetriegruppe zwar Verschiebungen ($\neq \mathbb{I}$) enthält, jedoch kein t_1 existiert, wie in der Definition gefordert. Eine reguläre Parkettierung der Ebene, z.B. durch lauter kongruente Quadrate begrenzt durch zwei senkrecht zueinander liegender Parallelenscharen, ist ebenso *kein* Bandornament, da nicht jede ihrer Translationssymmetrien Vielfache einer *einzigen* Translation t_1 ist. Vielmehr werden diese erzeugt von *zwei* Translationen in verschiedene Richtungen. Versetzt man in dieser regulären Parkettierung jedoch eine einzige der unendlich vielen Zeilen von Quadraten z.B. um eine halbe Quadratseitenlänge, so erhält man gemäss unserer Definition ein Bandornament. Wir wollen uns jedoch einschränken auf Bandornamente, die sich nur in Richtung der Verschiebung t_1 — wir nennen sie die *horizontale* Richtung — unendlich ausdehnen, die also tatsächlich ausserhalb eines „Bandes“ (endlicher Breite) keine Punkte haben.

Symmetrien eines Bandornamentes
Mögliche Kongruenzen, die ein Bandornament $\mathcal{B}$ auf sich abbilden sind, neben den

Translationen $\mathbf{T} = \{t_1^n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$, die definitionsgemäss vorhanden sein müssen,

H Spiegelungen an (genau) einer horizontalen Geraden,

V Spiegelungen an einer (und also unendlich vielen) vertikalen Geraden,

P Punktspiegelungen an einem (und also unendlich vielen) Punkten,

S Schubspiegelungen in Richtung von t_1.

Bemerkungen zu den möglichen Symmetrien eines Bandornamentes
Es ist klar, dass keine anderen Drehungen als um 180° (also Punktspiegelungen) Symmetrien eines Bandornamentes sein können, da nur solche ein Band endlicher Breite (oder das ein solches Band begrenzende Parallelenpaar) auf sich abbilden. (Dies gilt aber auch für Bandornamente „unendlicher Breite.“) Aus dem gleichen Grund muss eine Symmetrieachse entweder horizontal oder vertikal sein. Gäbe es zwei verschiedene horizontale Symmetrieachsen, so wäre die Verknüpfung der entsprechenden Geradenspiegelungen eine vertikale Verschiebung, also kein Vielfaches von t_1. Andererseits ergibt eine Spiegelung an einer vertikalen Achse verknüpft mit t_1 wiederum eine Spiegelung an einer vertikalen Achse, jedoch versetzt um den halben Verschiebungsabstand. Ähnlich verhält es sich mit einer Punktspiegelung. Eine Schubspiegelung kann Symmetrie sein auch wenn keine horizontale Symmetrieachse vorliegt. Jedoch ergibt eine horizontale Translation verknüpft mit einer Spiegelung an einer horizontalen Symmetrieachse eine (horizontale) Schubspiegelung. So sieht man, dass die verschiedenen möglichen Symmetrien eines Bandornamentes nicht unabhängig voneinander auftreten. Dies führt zu folgender

Aufgabe
Streiche in der folgenden Liste aller 16 Kombinationen diejenigen 9 Kombinationen von möglichen Bandornamentsymmetrien weg, die nicht ausschliesslich auftreten können, ohne dass gleichzeitig noch deren weitere vorhanden sein müssen. Dabei ist es nützlich, die gegebenen Symmetrien als Kombinationen von Geradenspiegelungen aufzufassen.

$\{\mathbf{T}\}$, $\{\mathbf{T},\mathbf{H}\}$, $\{\mathbf{T},\mathbf{V}\}$, $\{\mathbf{T},\mathbf{P}\}$, $\{\mathbf{T},\mathbf{S}\}$, $\{\mathbf{T},\mathbf{H},\mathbf{V}\}$, $\{\mathbf{T},\mathbf{H},\mathbf{P}\}$, $\{\mathbf{T},\mathbf{H},\mathbf{S}\}$, $\{\mathbf{T},\mathbf{V},\mathbf{P}\}$,

$\{\mathbf{T},\mathbf{V},\mathbf{S}\}$, $\{\mathbf{T},\mathbf{P},\mathbf{S}\}$, $\{\mathbf{T},\mathbf{H},\mathbf{V},\mathbf{P}\}$, $\{\mathbf{T},\mathbf{H},\mathbf{V},\mathbf{S}\}$, $\{\mathbf{T},\mathbf{H},\mathbf{P},\mathbf{S}\}$, $\{\mathbf{T},\mathbf{V},\mathbf{P},\mathbf{S}\}$,

$\{\mathbf{T},\mathbf{H},\mathbf{V},\mathbf{P},\mathbf{S}\}$ (letztere bleibt stehen, da dies alle möglichen Symmetrien sind).
Gib zu jeder der 7 möglichen Klassen ein Beispiel. (Siehe folgende Seiten.)

Satz Symmetrien von Bandornamenten

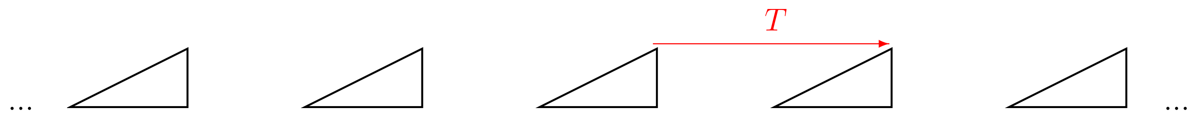
Die Symmetriegruppe eines Bandornamentes ist in einer von 7 möglichen Klassen, den sog. 7 *Friesgruppen*.

Beweis: Vorangehende Aufgabe. □

Die sieben möglichen Symmetriegruppen von Bandornamenten

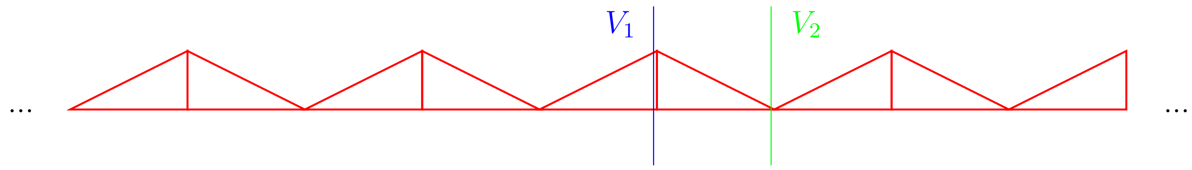
Klasse I (**T**)

Ausser T^n keine Symmetrien.



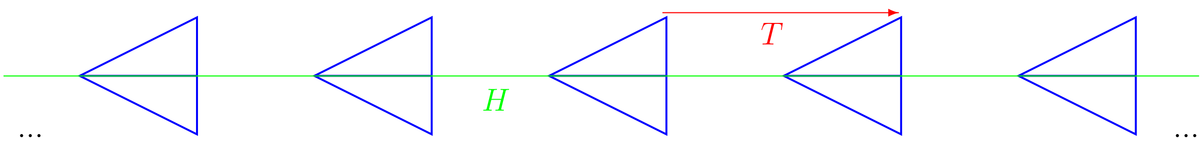
Klasse II (**T**, **V**)

Zwei Spiegelungen V_1 , V_2 an Vertikalen erzeugen alle Symmetrien. $T = V_2 \circ V_1$.



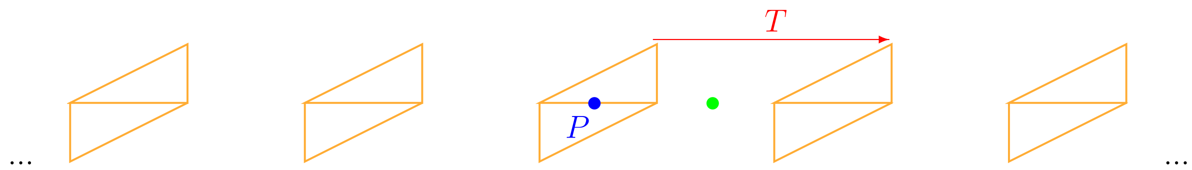
Klasse III (**T**, **H**, **S**)

Spiegelung H an einer Horizontalen und Translation T erzeugen alle Symmetrien.
Die Verknüpfung von H und T ergibt eine Schubspiegelung S.



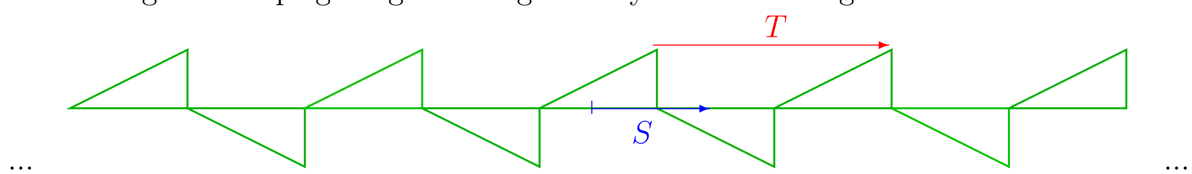
Klasse IV (**T**, **P**)

Punktspiegelung P und Translation T erzeugen alle Symmetrien.
Ebenso zwei Punktspiegelungen P_1 und P_2. Es folgt $T = P_2 \circ P_1$.



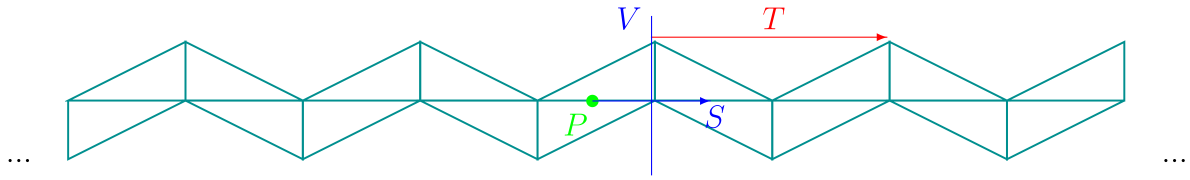
Klasse V (**T**, **S**)

Eine einzige Schubspiegelung S erzeugt alle Symmetrien. Es gilt $T = S \circ S$.



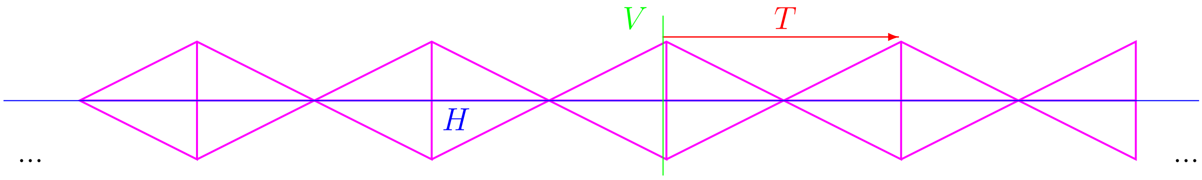
Klasse VI (**T**, **V**, **P**, **S**)

Punktspiegelung P und Schubspiegelung S erzeugen alle Symmetrien. $T = S \circ S$. Ebenso P und Spiegelung $V = S \circ P$ an vertikaler Achse. Es folgt $S = V \circ P$.



Klasse VII (**T**, **V**, **H**, **P**, **S**)

Symmetrien erzeugt von T, H (Spiegelung an Horizontaler) sowie V (Vertikale). Ebenso H, V_1 und V_2 (zwei Vertikale) mit $T = V_2 \circ V_1$.

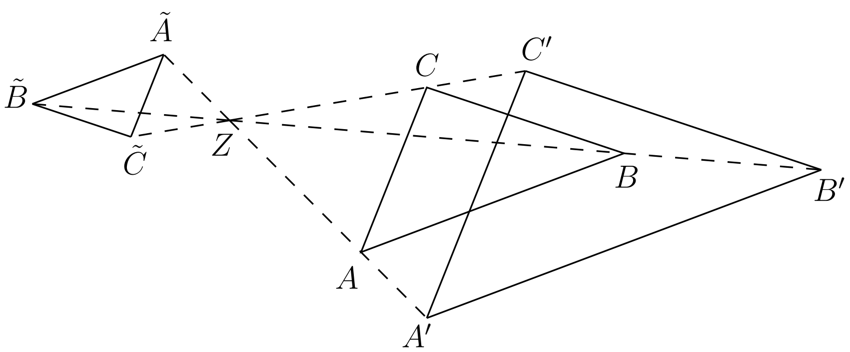


Bemerkung:
In der Literatur werden diese 7 Klassen auch anders numeriert/bezeichnet.

Aufgabe
Klassifiziere ebenso die Symmetriegruppen endlicher Figuren in der Ebene (also von Figuren ohne Translationssymmetrien), die sog. *Rosettengruppen*. Dabei betrachte man nur Figuren mit lauter diskreten Symmetrien, also solchen, wo der Abstand von Punkt P und Bildpunkt P' midestens $m(P) > 0$ (anhängig von P) beträgt, ausser er sei ein Fixpunkt, $P = P'$. Der Kreis wird durch diese Bedingung z.B. ausgeschlossen. Wieso? Diskutiere heuristisch.

2.3 Ähnlichkeitsgeometrie

2.3.1 Strahlensätze



Zentrische Streckung

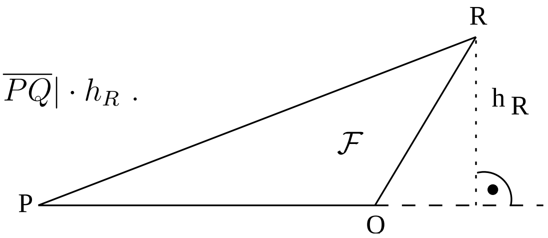
zentrische Streckung

Man sagt, das Dreieck $A'B'C'$ oben geht aus dem Dreick ABC durch *zentrische Streckung* mit *Streckungsfaktor* $k = 1.5$ hervor. Dabei werden von einem festen Punkt Z aus die Strahlen ZA, ZB und ZC eingezeichnet und auf diesen die um den Faktor k verlängerten Strecken $\overline{ZA}$, $\overline{ZB}$ bzw. $\overline{ZC}$ von Z aus abgetragen. Man erhält die Punkte A', B' bzw. C'.
Ebenso sagt man, das Deieck $\tilde{A}\tilde{B}\tilde{C}$ gehe aus ABC durch zentrische Streckung von Z aus mit Faktor $k = -0.5$ hervor. Das Minuszeichen bedeutet, dass man die Strecken auf die andere Seite von Z abträgt.

Behauptung
Es stellt sich heraus, dass dann z.B. die Seite $\overline{A'B'}$ *parallel* ist zur Seite $\overline{AB}$ und um $k = 1.5$–mal länger. Analoges gilt für die weiteren Seiten.

Beweis
Im Beweis benutzen wir, dass die Fläche $\mathcal{F}$ eines Dreiecks PQR — wir schreiben dafür $|PQR|$ — gegeben ist durch

$$\mathcal{F} = |PQR| = \tfrac{1}{2} \cdot |\overline{PQ}| \cdot h_R \ .$$



Wir beweisen zunächst $AB||A'B'$. Sei k der Streckungsfaktor.
Zunächst gilt $|ZA'B| = k \cdot |ZAB|$, da die Grundseite $\overline{ZA'}$ k–mal länger ist als $\overline{ZA}$ und die Dreiecke die gleiche Höhe durch B haben. Analog hat das Dreieck $ZB'A$ die k–fache Fläche von ZBA. Also haben $ZA'B$ und $ZB'A$ und deshalb auch ABA' und ABB' die gleiche Fläche. Da ABA' und ABB' die gleiche Grundseite $\overline{AB}$ und gleiche Flächen haben, haben sie gleiche Höhe, also $AB||A'B'$.
Wir beweisen nun, dass die Seite $\overline{A'B'}$ k–mal so lang ist wie $\overline{AB}$. Auch dies geht über Flächenbetrachtungen. Zunächst gilt $|ZA'B'| = k \cdot |ZA'B|$, da die Grundseite $\overline{ZB'}$ k–mal länger ist als $\overline{ZB}$ und die Dreiecke die gleiche Höhe durch A' haben. Die Dreiecke $A'B'B$ mit Höhe durch B und ABA' mit Höhe durch A' haben die gleiche Höhe, da $AB||A'B'$. Es gilt

$$|A'B'B| = |ZA'B'| - |ZA'B| = k\cdot|ZA'B| - k\cdot|ZAB| = k\cdot(|ZA'B| - |ZAB|) = k\cdot|ABA'|.$$

Mit der vorhergehenden Bemerkung zu den gleichen Höhen von $A'B'B$ und ABA' folgt aus diesem Flächenvergleich $\overline{A'B'} = k \cdot \overline{AB}$. □

Entsprechend gilt in der Figur auf S.35 auch $\tilde{A}\tilde{B}||AB$ und $|\overline{\tilde{A}\tilde{B}}| = |k| \cdot |\overline{AB}|$, wobei nun $k = -0.5$ ist.

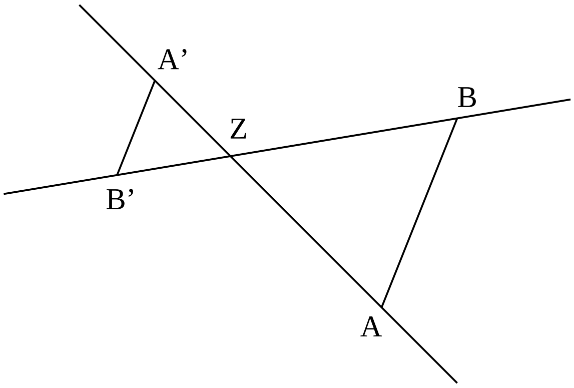
Ferner hat obige Tatsache hat auch eine Umkehrung. Aus z.B. $AB||A'B'$ folgt

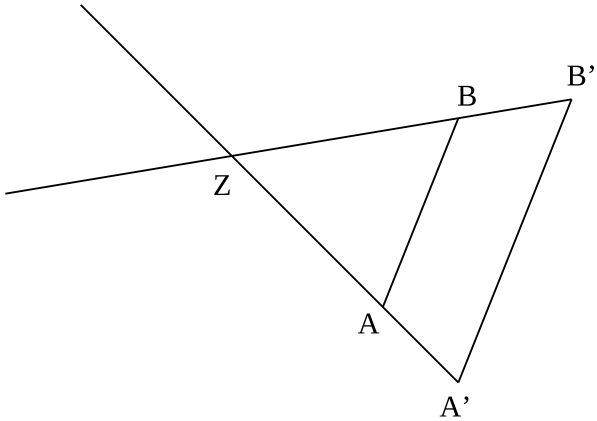
$$|\overline{ZA'}| : |\overline{ZA}| = |\overline{ZB'}| : |\overline{ZB}| = |\overline{A'B'}| : |\overline{AB}| \ .$$

Zusammengefasst haben wir also die

Strahlensätze

.





1. Ist $AB||A'B'$, so gilt $|ZA'| : |ZA| = |ZB'| : |ZB| = |A'B'| : |AB|$.
2. Gilt $|ZA'| : |ZA| = |ZB'| : |ZB| = k$, so folgt $AB||A'B'$ und $|\overline{A'B'}| : |\overline{AB}| = k$, falls A', B' bzgl. Z beide auf der gleichen oder beide auf der gegenüberliegenden Seite von A, B liegen.

Definition ähnliche Figuren

Zwei ebene geometrische Figuren $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ und heissen *ähnlich*, wenn sie nach einer zentrischen Streckung kongruent sind. Man schreibt $\mathcal{F} \sim \mathcal{G}$.

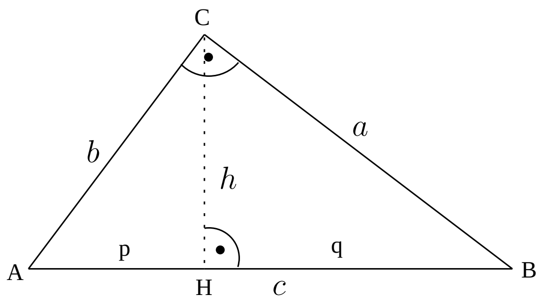
Ähnliche Figuren stimmen in allen *Winkeln* und allen *Längenverhältnissen* überein. Aus Gründen der Vollständigkeit führen wir hier die *Ähnlichkeitssätze* für Dreiecke auf, deren Beweis direkt aus den entsprechenden Kongruenzsätzen auf S.29 folgt.

Ähnlichkeitssätze für Dreiecke Ähnlichkeitssätze

Zwei Dreiecke sind ähnlich,
— falls sie in zwei (und deshalb in allen drei) Seitenverhältnissen übereinstimmen,
— falls sie in einem Seitenverhältnis und dem eingeschlossenen Winkel übereinstimmen,
— falls sie in zwei (und deshalb in allen drei) Winkeln übereinstimmen oder
— falls sie in einem Seitenverhältnis und dem der längeren Seite gegenüberliegenden Winkel übereinstimmen.

2.3.2 Satzgruppe des Pythagoras

Die Strahlensätze und Ähnlichkeitssätze sind ein sehr wichtiges Hilfsmittel der synthetischen Geometrie mit denen man viele weitere Sätze beweisen kann. Wir beginnen hier mit den Sätzen über rechtwinklige Dreiecke.



Wir betrachten ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit dem rechten Winkel bei C. Wir zeichnen die Höhe $h = h_c$ ein mit Höhenfusspunkt H, der die Hypotenuse c in die zwei Hypotenusenabschnitte p und q unterteilt, $c = p + q$. Wir stellen fest

$$ACH \sim ABC \sim CBH \ .$$

Das Dreieck ACH ist zum Dreieck ABC ähnlich, da sie im Winkel bei A und in einem rechten Winkel übereintimmen. Ebenso sind diese zwei Dreiecke ähnlich zum Dreieck CBH. Also haben wir folgende übereinstimmende Seitenverhältnisse

$$\frac{p}{b} = \frac{b}{c} \text{ (da } ACH \sim ABC) \ , \ \frac{q}{a} = \frac{a}{c} \text{ (da } CBH \sim ABC) \ .$$

Wir multiplizieren diese Gleichungen je mit dem Produkt der Nenner und erhalten den

Kathetensatz

$$p \cdot c = b^2 \text{ und } q \cdot c = a^2 \ .$$

Das Produkt der Hypotenuse mit einem Hypotenusenabschnitt ist gleich dem Quadrat der darüberliegenden Kathete.

Durch Addition ergibt sich der

Satz des Pythagoras

$$a^2 + b^2 = q \cdot c + p \cdot c = (q + p) \cdot c = c^2 \ .$$

Im rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Kathetenquadrate gleich dem Hypotenusenquadrat.

Vernachlässigt wird oft die Umkehrung dieses Satzes:

Sind in einem Dreieck die Summen der Quadrate der zwei kürzeren Seiten gleich dem Quadrat der längsten Seite, so schliessen die zwei kürzeren Seiten einen rechten Winkel ein.

Schliesslich folgt aus $ACH \sim CBH$, dass $p : h = h : q$ gilt und somit der

Höhensatz

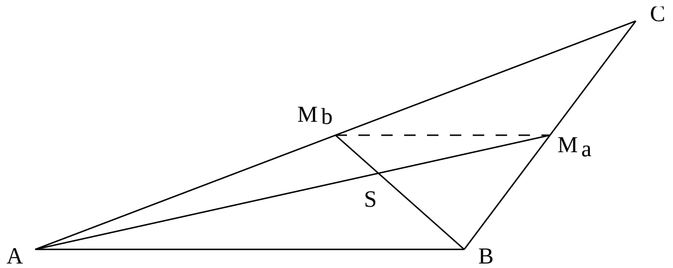
$$p \cdot q = h^2 \ .$$

Das Produkt der Hypotenusenabschnitte ist gleich dem Quadrat der Höhe auf der Hypotenuse.

Es gibt unzählige weitere Beweise dieser Sätze. Über die Ähnlichkeitssätze geht es aber sehr direkt und elegant.

2.3.3 Schwerelinien und Winkelhalbierende

Satz

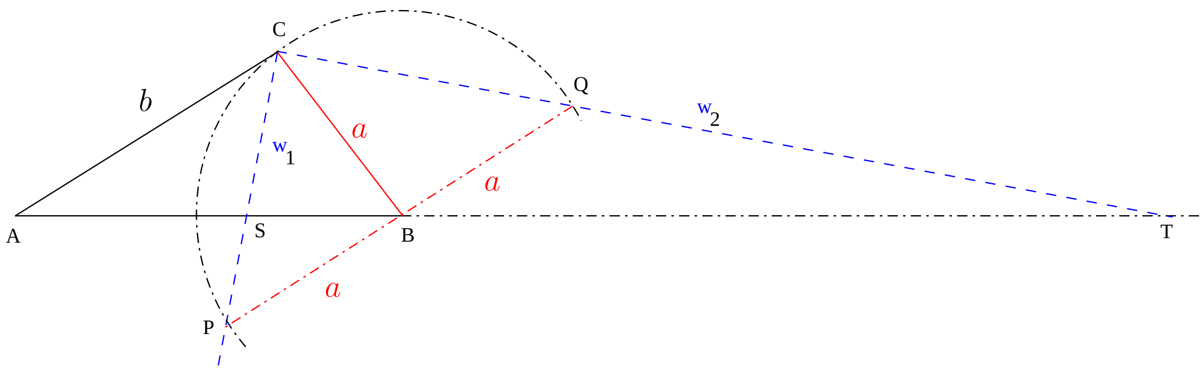


Die Schwerelinien (Seitenhalbierenden) eines Dreiecks teilen sich im Verhältnis $2:1$.

Beweis

Aus $|\overline{AC}| : |\overline{M_bC}| = 2 : 1 = |\overline{BC}| : |\overline{M_aC}|$ folgt nach dem 1.Strahlensatz auf S.37 $M_aM_b||AB$ und $|\overline{AB}| : |\overline{M_aM_b}| = 2 : 1$. Damit folgt aus dem 2.Strahlensatz $|\overline{AS}| : |\overline{SM_a}| = |\overline{BS}| : |\overline{SM_b}| = 2 : 1$. □

Satz



Die innere (w_1) bzw. äussere (w_2) Winkelhalbierende in einem Dreieck teilt die gegenüberliegende Seite innen bzw. aussen im Verhältnis der anliegenden Seiten.

Beweis

Zum Beweis tragen wir die Seite a von B aus auf die Winkelhalbierenden w_1 und w_2 ab. Der Winkel $\sphericalangle CPB$ ist gleich dem Winkel $\sphericalangle PCB$ (gleichschenkliges Dreieck PCB) und dieser Winkel ist gleich dem Winkel $\sphericalangle PCA$ (da w_1 Winkelhalbierende ist). Also gilt $AC||PB$ und daher nach dem 1.Strahlenatz auf S.37

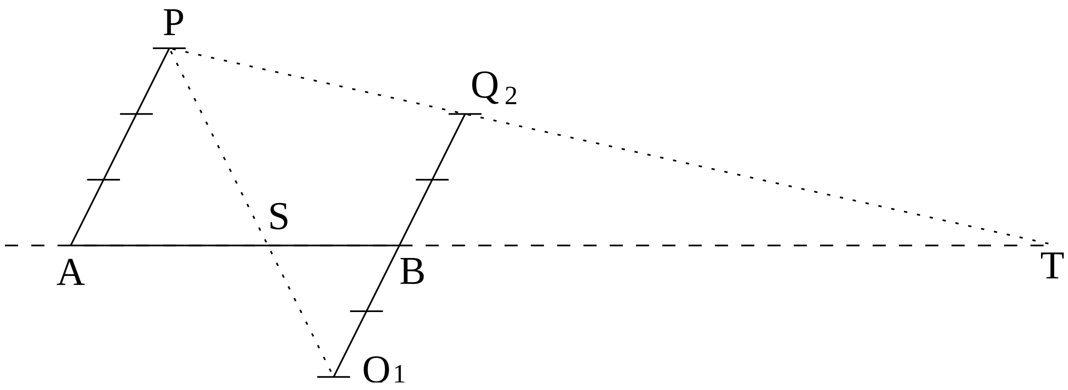
$$a : b = |\overline{SB}| : |\overline{SA}| \ (= |\overline{SP}| : |\overline{SC}|) \ .$$

Ebenso zeigt man $AC||BQ$ und folgert daraus

$$a : b = |\overline{BT}| : |\overline{AT}| \ (= |\overline{QT}| : |\overline{CT}|) \ .$$

□

2.3.4 Harmonische Teilung und Apolloniuskreis



Es gibt zwei Punkte auf der Geraden AB, die die Strecke $\overline{AB}$ im Verhältnis 3 : 2 teilen. Man nennt S den <u>*inneren*</u> und T den <u>*äusseren Teilungspunkt*</u> der Strecke $\overline{AB}$ zu diesem Teilungsverhältnis $k = 3 : 2$. Für diese zwei Punkte gilt

$$|\overline{AS}| : |\overline{BS}| = k = |\overline{AT}| : |\overline{BT}| \ .$$

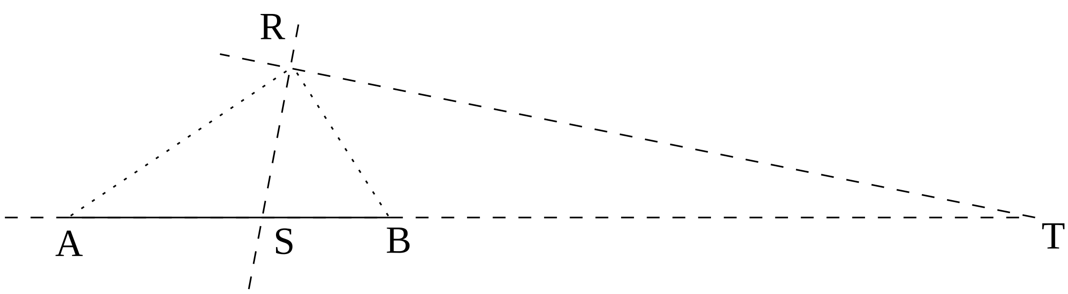
Man findet diese zwei Punkte konstruktiv, indem man von A und B aus zwei parallele Strecken abträgt, im Längenverhältnis k und z.B. vom Punkt B aus in beide Richtungen. Man erhält die Punkte P, Q_1 und Q_2. Diese verbindet man entsprechend der Figur und die Schnittpunkte mit der Geraden AB sind die Teilungspunkte. Der Beweis folgt direkt aus dem Strahlensatz.

Beispiel

Ist z.B. $A(0|0)$ und $B(10|0)$ gegeben, so erhält man $S(6|0)$ und $T(30|0)$ als inneren und äusseren Teilungspunkt zum Teilungsverhältnis $k = 3 : 2$.
In der Ebene gibt es aber noch viele weitere Punkte R mit

$$|\overline{AR}| : |\overline{BR}| = k \ .$$

Sei nun R ein weiterer solcher Punkt, also $|\overline{AR}| : |\overline{BR}| = k$.



Gemäss Satz über die Winkelhalbierenden ist dann RS die *innere* und RT die *äussere* Winkelhalbierende des Winkels $\sphericalangle ARB$. Diese stehen aber *senkrecht* aufeinander. Also liegt R auf dem Thaleskreis über dem Durchmesser ST.

Satz

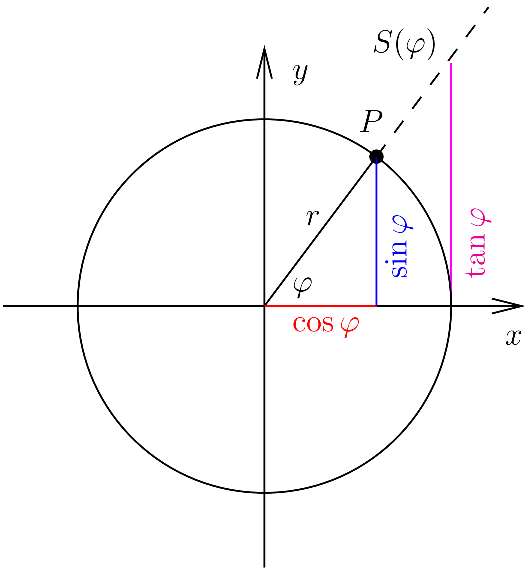
Die Punkte R mit einem Abstandsverhältnis $k \neq 1$ von zwei festen Punkten A und B, $|\overline{AR}| : |\overline{BR}| = k$, liegen auf dem Thaleskreis mit Durchmesser $\overline{ST}$, dem sog. <u>Apolloniuskreis</u> zu diesem Abstandsverhältnis. Dabei sind S, T innerer und äusserer Teilungspunkt zum Teilungsverhältnis k.

2.4 Trigonometrie

Die Kongruenzsätze auf S.29 besagen, dass aus den Angaben gewisser Grössen eines Dreiecks das Dreieck insgesamt bis auf Kongruenz bestimmt ist. Daraus resultieren entsprechende Konstruktionsaufgaben. Hier wollen wir untersuchen, wie sich aus gewissen Angaben zu einem Dreieck (Seitenlängen, Winkel) dessen übrige Grössen (fehlende Seitenlängen, Winkel, aber auch Höhen, Fläche, ...) *berechnen* lassen.

2.4.1 Winkelfunktionen am Einheitskreis

Gewöhnlich führt man zunächst die Winkelfunktionen *Sinus*, *Cosinus*, *Tangens* [3] über Seitenverhältnisse am rechtwinkligen Dreieck ein. Einen viel einfacheren Zugang erhält man aber aus der *Definition* dieser Winkelfunktionen am Einheitskreis.



Sei $P(x|y)$ ein Punkt auf dem Einheitskreis, also sein Abstand vom Ursprung gleich 1:

$$x^2 + y^2 = 1 \ .$$

Wir bezeichnen den Radius vom Ursprung zu P mit r und φ sei der Winkel, den r mit der positiven x–Achse einschliesst. Sei also $\varphi \in [0, 2\pi)$. Wir definieren nun

Winkelfunktionen
Cosinus: $\cos\varphi = x$–Koordinate des Punktes P,

Sinus: $\sin\varphi = y$–Koordinate des Punbktes P,

Tangens: $\tan\varphi =$ Länge des Tangentenabschnittes $\overline{(1|0)S(\varphi)}$ (mit Vorzeichen).

Bemerkungen
Für alle Winkel φ gilt

$$\cos^2(\varphi) + \sin^2\varphi = 1 \text{ (trigonometrischer Pythagoras).}$$

Der Tangens der Winkel $\varphi = 90° \cong \pi/2$ und $270° \cong 3\pi/2$ ist nicht definiert.
Aus dem Strahlensatz folgt

$$\tan\varphi = \tan\varphi : 1 = \sin\varphi : \cos\varphi \ .$$

Die Tangensfunktion nimmt alle Werte aus $\mathbb{R}$ an, Sinus und Cosinus nimmt Werte in $[-1, 1]$ an.

[3] Früher waren auch noch *Cotangens*, *Secans* und *Cosecans* geläufige Funktionen.

Die Winkelfunktionen sind für alle $\varphi \in \mathbb{R}$ definiert (ausser in einzelnen Punkten, wo der Tangens nicht definiert ist). Im Grad– bzw. Bogenmass setzt man

$$\sin(\varphi \pm 360°) = \sin\varphi \ , \ \cos(\varphi \pm 360°) = \cos(\varphi) \ , \ \tan(\varphi \pm 360°) = \tan\varphi \text{ bzw.}$$

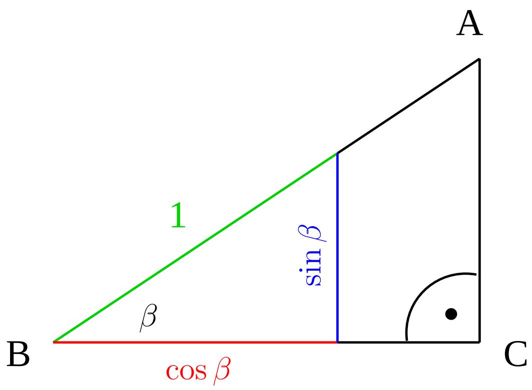
$$\sin(\varphi \pm 2\pi) = \sin\varphi \ , \ \cos(\varphi \pm 2\pi) = \sin(\varphi) \ , \ \tan(\varphi \pm 360°) = \tan\varphi \ .$$

Man sagt, alle Winkelfunktionen sind *periodisch* mit Periode 360° bzw. 2π. Man sieht leicht ein, dass für den Tangens sogar gilt $\tan\varphi = \tan(\varphi \pm 180°)$ bzw. $\tan\varphi = \tan(\varphi \pm \pi)$. Mittels elementarer geometrischer Argumente (Pythagoras) sieht man ein, dass man für einige spezielle Winkel $0°, 30°, 45° \ldots$ die Werte der Winkelfunktionen exakt angeben kann. Man fülle dazu die folgende Tabelle aus.

Einige exakte Werte der Winkelfunktionen

$\varphi°$	0°	30°	45°	60°	90°			150°		210°		...
φ	0				$\pi/2$	$2\pi/3$	$3\pi/4$		π		$5\pi/4$	...
$\sin(\varphi)$	0							$1/2$				
$\cos(\varphi)$									-1			
$\tan(\varphi)$											1	

Wir erwähnen nun noch kurz die Winkelfunktionen am rechtwinkligen Dreieck.



Wir betrachten z.B. den Winkel β im rechtwinkligen Dreieck links und stellen mit Strahlensatz fest

$$\frac{|\overline{AC}|}{\sin\beta} = \frac{|\overline{AB}|}{1} \text{ oder } \sin\beta = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{AB}|} = \frac{b}{c} \ .$$

Oft sagt man auch

$$\sin\beta = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} \ .$$

Entsprechend gilt für den Cosinus

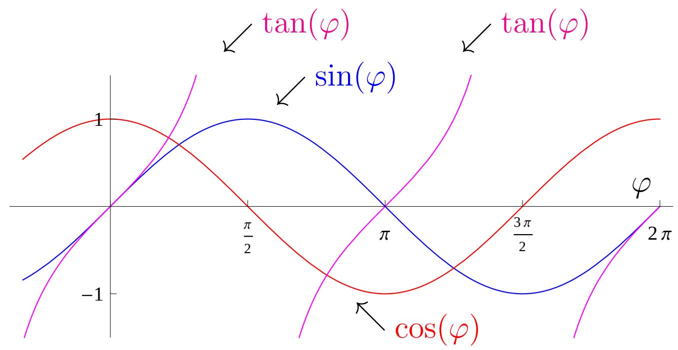
$$\cos\beta = \frac{|\overline{BC}|}{|\overline{AB}|} = \frac{a}{c} = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} \ .$$

Und schliesslich für den Tangens

$$\tan\beta = \frac{|\overline{AC}|}{|\overline{BC}|} = \frac{b}{a} = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} \ .$$

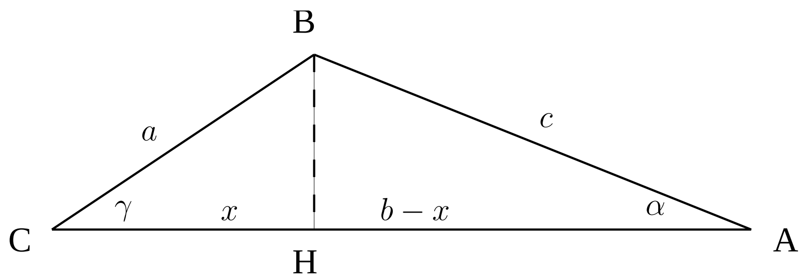
Wie gesagt erhält man so aber einen eingeschränkten Definitionsbereich dieser Winkelfunktionen auf den Bereich $\varphi \in [0, 90°) \cong [0, \pi/2)$. Am Einheitskreis sind diese Definitionen übersichtlicher und ergeben sich gerade für alle Winkel $\varphi \in [0, 360°] \cong [0, 2\pi]$.

Wir zeigen noch die Graphen der trigonometrischen Funktionen auf dem Intervall $[0, 2\pi]$.
Sinus und *Cosinus* nehmen Werte zwischen -1 und 1 an.
Tangens nimmt alle reellen Zahlen als Wert an und ist bei $\pi/2 + n \cdot \pi$ nicht definiert ($n \in \mathbb{Z}$).



2.4.2 Sinussatz und Cosinussatz

Für Rechnungen am Dreieck leiten wir nun zwei Sätze her. Wir betrachten dazu ein allgemeines Dreieck ABC, das wir wie üblich beschriften.



Wir drücken zunächst die Höhe $h_b = \overline{HB}$ auf zwei verschiedene Arten aus,

$$a \cdot \sin\gamma = h_b = c \cdot \sin\alpha \ .$$

Durch Umformung und weitere ähnliche Argumente ergibt sich der
Sinussatz

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} \ .$$

Nun drücken wir die Seite c mittels Pythagoras aus,

$$c^2 = |\overline{HB}|^2 + (b-x)^2 = (a \cdot \sin\gamma)^2 + (b - a \cdot \cos\gamma)^2 \ .$$

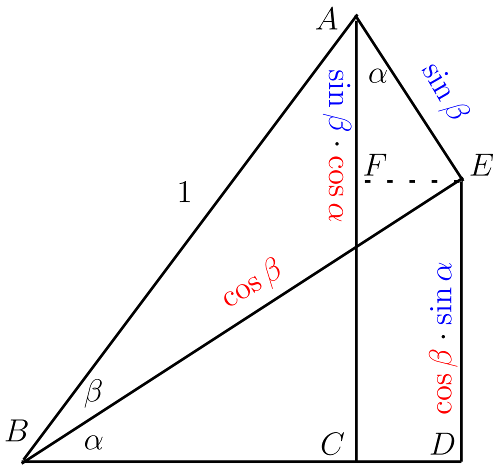
Durch Ausquadrieren und mit Verwendung von $\cos^2\gamma + \sin^2\gamma = 1$ erhält man den
Cosinussatz

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma \ .$$

Ist γ ein rechter Winkel, so erhält man den Satz von Pythagoras ($\cos 90° = 0$).
Diese Sätze sind wichtig für die Berechnung von Grössen im Dreieck (Seiten, Winkel) aus gegebenen Grössen (Seiten, Winkel).

Beispiel
Konstruiere alle Dreiecke mit Seiten $a = 13$, $b = 8$ und $\beta = 36°$. Jemand behauptet, alle Lösungen seien gleichschenklig. Rechne!

2.4.3 Additionstheoreme



Wir wollen $\sin(\alpha+\beta) = |\overline{AC}|$ durch Winkelfunktionen von α und β alleine ausdrücken. Dazu benutzen wir die Figur links. Bei C, D, E, F sind lauter rechter Winkel.
Aus $|\overline{BE}| = \cos\beta$ folgt

$$|\overline{DE}| = \cos\beta\cdot\sin\alpha = |\overline{CF}| \ .$$

Aus $|\overline{AE}| = \sin\beta$ folgt

$$|\overline{AF}| = \sin\beta\cdot\cos\alpha \ .$$

Insgesamt erhalten wir das

Additionstheorem für den Sinus

$$\sin(\alpha+\beta) = |\overline{CF}| + |\overline{AF}| = \sin(\alpha)\cdot\cos(\beta) + \sin(\beta)\cdot\cos(\alpha) \ .$$

Ebenso und mit der selben Figur erhält man das

Additionstheorem für den Cosinus

$$\cos(\alpha+\beta) = |\overline{BD}| - |\overline{CD}| = \cos(\alpha)\cdot\cos(\beta) - \sin(\alpha)\cdot\sin(\beta) \ .$$

Für den Tangens schliesslich kombinieren wir diese beiden Additionstheoreme,

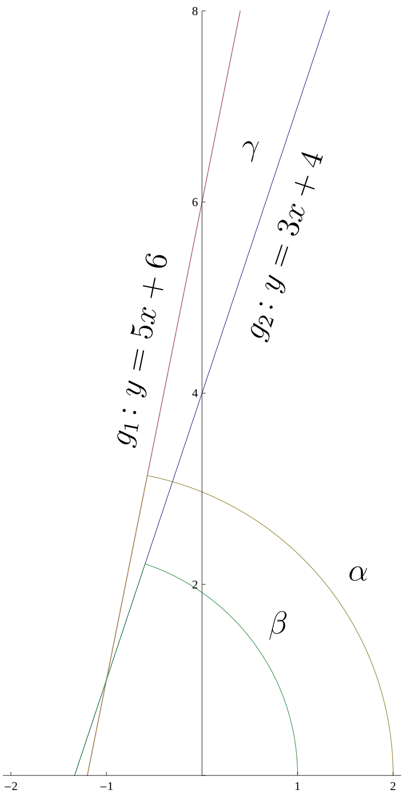
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin(\alpha)\cdot\cos(\beta)+\sin(\beta)\cdot\cos(\alpha)}{\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)-\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)} \ .$$

Wir teilen nun Zähler und Nenner durch $\cos(\alpha)\cdot\cos(\beta)$ und erhalten so das

Additionstheorem für den Tangens

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan(\alpha)+\tan(\beta)}{1-\tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)} \ .$$

Diese letzte Formel ist nützlich für die Berechnung des Winkels zwischen zwei Geraden.



Wir betrachten die zwei Geraden $g_1 \colon y = 5x + 6$ und $g_2 \colon y = 3x + 4$. Deren Steigungen sind

$$\begin{aligned} m_1 &= 5 = \tan(\alpha) \text{ und} \\ m_2 &= 3 = \tan(\beta) \ . \end{aligned}$$

Wir interessieren uns für den Winkel $\gamma = \alpha - \beta$, den die beiden Geraden einschliessen.
Mit $\tan(-\varphi) = -\tan(\varphi)$ und dem obigen Additionstheorem ergibt sich

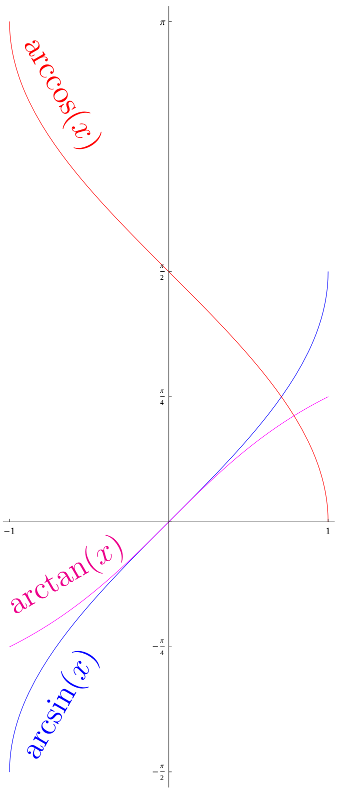
$$\begin{aligned} \tan(\gamma) &= \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha) \cdot \tan(\beta)} \\ &= \frac{5 - 3}{1 + 5 \cdot 3} = 1/8 \ . \end{aligned}$$

Mit dem Taschenrechner finden wir den Winkel, dessen Tangens $1/8$ ist,

$$\gamma = \tan^{-1}(1/8) \approx 0.124 \cong 7.13^\circ \ .$$

Die Umkehrfunktion $\tan^{-1}$ des Tangens heisst offiziell *Arcustangens*, abgekürzt arctan.

2.4.4 Arcusfunktionen



Wir haben z.B. (im Bogenmass)

$$\sin(\pi/6) = \sin(5\pi/6) = \sin(-7\pi/6) = \cdots = 1/2 \ .$$

Die Umkehrfunktion arcsin (*Arcussinus*) von $1/2$ ist also nicht eindeutig definiert und links zeigt der Graph, welchen Wert der Taschenrechner ausgibt: $\sin^{-1}(1/2) = \pi/6$. Allgemein wird ein Wert in $[-\pi/2, \pi/2]$ ausgegeben.
Der Wert des *Arcuscosinus* wird in $[0, \pi]$ ausgegeben, z.B. $\cos^{-1}(-1/2) = 2\pi/3$.
Sowohl Arcussinus– als auch –cosinus sind nur für $x \in [-1, 1]$ definiert. Demgegenüber ist der *Arcustangens* für alle $x \in \mathbb{R}$ definiert und nimmt auf dem Taschenrechner Werte in $(-\pi/2, \pi/2)$ an.
In der Graphik links sieht man allerding nur einen Ausschnitt, z.B. $\tan^{-1}(1) = \pi/4$.
Bei Berechnungen z.B. am Dreieck ist immer zu hinterfragen, ob der vom Taschenrechner ausgegebene Wert auch derjenige ist, der dem gestellten Problem entspricht.

Beispiel
Berechne die fehlenden Grössen (Seiten und Winkel) eines Dreiecks mit $a = 20$, $b = 30$ und $\gamma = 15°$.
Lösung
Wir berechnen zuerst mit dem Cosinussatz von S.43

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma) = 20^2 + 30^2 - 2 \cdot 20 \cdot 30 \cdot \cos(15°) \approx 140.889,$$

also $c \approx \sqrt{140.889} \approx \underline{\underline{11.87}}$. Nun könnte man mit dem Sinussatz weiterfahren,

$$\sin(\beta) = b \cdot \frac{\sin(\gamma)}{c} \approx 30 \cdot \frac{\sin(15°)}{11.87} \approx 0.654 \; .$$

Betätigt man nun einfach die Taschenrechnertaste $\sin^{-1}$, so erhält man

$$\sin^{-1}(0.654) \text{ „} = \text{“ } 40.86° \; .$$

Mit $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos(\beta)$ erhält man hingegen

$$\cos(\beta) = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \cdot a \cdot c} \approx \frac{20^2 + 11.87^2 - 30^2}{2 \cdot 20 \cdot 11.87} \approx -0.756,$$

und daraus $\beta = \cos^{-1}(-0.756) \approx \underline{\underline{139.14}}° = 180° - 40.86°$. Mit dem Taschenrechner hat man also den „falschen“ Wert von $\sin^{-1}(0.654)$ erhalten, wie man sich z.B. an Hand einer Skizze hätte von vornherein denken können.
(Es wurden hier jeweils nur zwei, drei Nachkommastellen angegeben aber mit der vollen TR–Genauigkeit gerechnet.)

Kapitel 3

Vektorgeometrie

3.1 Vektoren in der Ebene

3.1.1 Definitionen und Rechengesetze

Definition

Vektorraum $\mathbb{R}^2$

Der *Vektorraum $\mathbb{R}^2$ über dem Körper der reellen Zahlen* ist die Menge aller Vektoren

$$\underline{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

versehen mit der Operation

— der *Vektoraddition:* $\underline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\underline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} x+u \\ y+v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$,

— der *skalaren Multiplikation:* $r \in \mathbb{R}$, $\underline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow r \cdot \underline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} r \cdot x \\ r \cdot y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

und den offensichtlichen Rechengesetzen für $r, s \in \mathbb{R}$ und $\underline{\mathbf{a}}$, $\underline{\mathbf{b}}$, $\underline{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^2$, nämlich

— $(\underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}}) + \underline{\mathbf{c}} = \underline{\mathbf{a}} + (\underline{\mathbf{b}} + \underline{\mathbf{c}})$ (*Assoziativität* der Vektoraddition)

— $\underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{b}} + \underline{\mathbf{a}}$ (*Kommutativität* der Vektoraddition)

— $r \cdot (\underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}}) = r \cdot \underline{\mathbf{a}} + r \cdot \underline{\mathbf{b}}$ und $(r+s) \cdot \underline{\mathbf{a}} = r \cdot \underline{\mathbf{a}} + s \cdot \underline{\mathbf{a}}$
und $(r \cdot s) \cdot \underline{\mathbf{a}} = r \cdot (s \cdot \underline{\mathbf{a}})$
(*Distributivität* und *Assoziativität* der skalaren Multiplikation).

Schon jetzt dürfte klar sein, wie dann z.B. der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ definiert ist.
Wir bemerken noch, dass $\mathbb{R}^2$ bezüglich der Vektoraddition eine *kommutative Gruppe* ist. Das Neutralelement ist $\underline{\mathbf{0}}$, der *Nullvektor*,

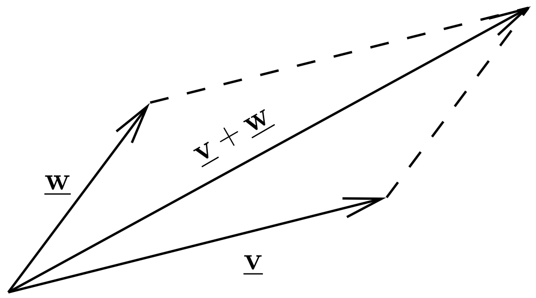
Nullvektor

$$\underline{\mathbf{0}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \underline{\mathbf{v}} + \underline{\mathbf{0}} = \underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{0}} + \underline{\mathbf{v}} \text{ für alle } \underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^2 .$$

Jeder Vektor $\underline{\mathbf{v}}$ hat einen inversen, den sog. *Gegenvektor* $-\underline{\mathbf{v}} = (-1) \cdot \underline{\mathbf{v}}$, Gegenvektor

$$\underline{\mathbf{v}} + (-\underline{\mathbf{v}}) = \underline{\mathbf{0}} = (-\underline{\mathbf{v}}) + \underline{\mathbf{v}} \, .$$

Die Vektoraddition kann mit der sog. *Parallelogrammregel* veranschaulicht werden. Vektoraddition



Für die Summenbildung $\underline{\mathbf{v}} + \underline{\mathbf{w}}$ setzt man dazu den einen Vektor an die Spitze des anderen oder den anderen an die Spitze des einen. Die Summe erscheint als Diagonale in einem Parallelogramm.
Man überlege sich selbständig, wie man sich die Differenz zweier Vektoren, $\underline{\mathbf{v}} - \underline{\mathbf{w}} = \underline{\mathbf{v}} + (-1) \cdot \underline{\mathbf{w}}$, veranschaulichen kann.

Definition Basis von $\mathbb{R}^2$

Eine *Basis* von $\mathbb{R}^2$ besteht aus einem geordneten Paar von Vektoren $\underline{\mathbf{b}}_1$ und $\underline{\mathbf{b}}_2$, so dass jeder Vektor $\underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^2$ *Linearkombination*

$$\underline{\mathbf{v}} = r_1 \cdot \underline{\mathbf{b}}_1 + r_2 \cdot \underline{\mathbf{b}}_2$$

von $\underline{\mathbf{b}}_1$ und $\underline{\mathbf{b}}_2$ ist, für *eindeutige* reelle Koeffizienten $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$, den sog. *Koordinaten* von $\underline{\mathbf{v}}$ in dieser Basis. Man sagt $\underline{\mathbf{b}}_1$ und $\underline{\mathbf{b}}_2$ *erzeugen* $\mathbb{R}^2$.

Die sehr spezielle Wahl

$$\underline{\mathbf{b}}_1 = \underline{\mathbf{e}}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \underline{\mathbf{b}}_2 = \underline{\mathbf{e}}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

nennen wir *Standardbasis* von $\mathbb{R}^2$. Standardbasis von $\mathbb{R}^2$
In der Standardbasis gilt für einen beliebigen Vektor

$$\underline{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \cdot \underline{\mathbf{e}}_1 + y \cdot \underline{\mathbf{e}}_2 \, .$$

Im allgemeinen erfordert die Darstellung eines Vektors $\underline{\mathbf{v}}$ als Linearkombination zweier Basisvektoren jedoch das Lösen eines Gleichungssystems, Darstellung eines Vektors in einer Basis

$$\underline{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = r_1 \cdot \underline{\mathbf{b}}_1 + r_2 \cdot \underline{\mathbf{b}}_2 = r_1 \cdot \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + r_2 \cdot \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \cdot a + r_2 \cdot b \\ r_1 \cdot c + r_2 \cdot d \end{pmatrix} .$$

Es ergibt sich also das lineare 2×2–Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x &= r_1 \cdot a + r_2 \cdot b \, , \\ y &= r_1 \cdot c + r_2 \cdot d \, . \end{aligned}$$

Dies haben wir auf S.15 im Unterabschnitt 1.3.1 ein für alle mal gelöst. Wir erhalten

$$r_1 = \frac{x \cdot d - b \cdot y}{a \cdot d - b \cdot c} \quad \text{und} \quad r_2 = \frac{a \cdot y - x \cdot c}{a \cdot d - b \cdot c} .$$

Gilt für den Nenner $a \cdot d - b \cdot c = 0$, so bilden die Vektoren $\underline{\mathbf{b}}_1$ und $\underline{\mathbf{b}}_2$ keine Basis. Geometrisch bedeutet dies dann, dass die Vektoren $\underline{\mathbf{b}}_1$ und $\underline{\mathbf{b}}_2$ parallel sind. Ausserdem sind dann

$$\underline{\mathbf{0}} = 0 \cdot \underline{\mathbf{b}}_1 + 0 \cdot \underline{\mathbf{b}}_2 = d \cdot \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} - c \cdot \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = b \cdot \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} - a \cdot \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

verschiedene Darstellungen des Nullvektors, falls nicht gerade $a = b = c = d = 0$. Dies führt auf folgende

Definition

linear unabhängig

Vektoren $\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2, \ldots$ heissen *linear unabhängig*, falls die Darstellung von $\underline{\mathbf{0}}$ als Linearkombination von $\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2, \ldots$ *eindeutig* ist, $\underline{\mathbf{0}} = 0 \cdot \underline{\mathbf{v}}_1 + 0 \cdot \underline{\mathbf{v}}_2 + 0 \cdot \ldots$. Andernfalls heissen sie *linear abhängig*. Mehr als zwei Vektoren in $\mathbb{R}^2$ sind immer linear abhängig. Weniger als zwei Vektoren im $\mathbb{R}^2$ sind nie erzeugend. Zwei Vektoren aus $\mathbb{R}^2$ sind genau dann linear unabhängig, wenn sie erzeugend sind. In diesem Fall bilden sie eine Basis. Analoges gilt für Vektorräume höherer Dimension.

linear abhängig

Sei die Darstellung eines Vektors $\underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^2$ als Linearkombination von zwei Vektoren $\underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2 \in \mathbb{R}^2$ *nicht* eindeutig. Sei also z.B.

$$\underline{\mathbf{v}} = r_1 \cdot \underline{\mathbf{v}}_1 + r_2 \cdot \underline{\mathbf{v}}_2 = s_1 \cdot \underline{\mathbf{v}}_1 + s_2 \cdot \underline{\mathbf{v}}_2 \quad \Rightarrow \quad (r_1 - s_1) \cdot \underline{\mathbf{v}}_1 = (s_2 - r_2) \cdot \underline{\mathbf{v}}_2 ,$$

wobei z.B. $r_1 \neq s_1$ sei. Dann sind $\underline{\mathbf{v}}_1$ und also auch $\underline{\mathbf{v}}$ skalare Vielfache von $\underline{\mathbf{v}}_2$, denn

$$\underline{\mathbf{v}} = r_1 \cdot \underline{\mathbf{v}}_1 + r_2 \cdot \underline{\mathbf{v}}_2 = r_1 \cdot \frac{s_2 - r_2}{r_1 - s_1} \cdot \underline{\mathbf{v}}_2 + r_2 \cdot \underline{\mathbf{v}}_2 = \left(r_1 \cdot \frac{s_2 - r_2}{r_1 - s_1} + r_2 \right) \cdot \underline{\mathbf{v}}_2 ,$$

und jedes Vielfache von $\underline{\mathbf{v}}_2$, also auch

$$\underline{\mathbf{0}} = 0 \cdot \underline{\mathbf{v}}_1 + 0 \cdot \underline{\mathbf{v}}_2 = (r_1 - s_1) \cdot \underline{\mathbf{v}}_1 - (s_2 - r_2) \cdot \underline{\mathbf{v}}_2 = \ldots$$

hat *beliebig viele* solche Darstellungen. Alle anderen Vektoren im $\mathbb{R}^2$ haben *keine* solche Darstellung. Ist also die Darstellung des *Nullvektors* eindeutig, so auch die Darstellung aller anderen Vektoren.

Definition

Orientierung

Eine Basis besteht aus einem *geordneten* Paar von Basisvektoren. Die Standardbasis $\underline{\mathbf{b}}_1 = \underline{\mathbf{e}}_1$, $\underline{\mathbf{b}}_2 = \underline{\mathbf{e}}_2$ ist genau genommen von der Basis $\underline{\mathbf{c}}_1 = \underline{\mathbf{e}}_2$, $\underline{\mathbf{c}}_2 = \underline{\mathbf{e}}_1$ zu unterscheiden. Allgemein sagt man, die Basis

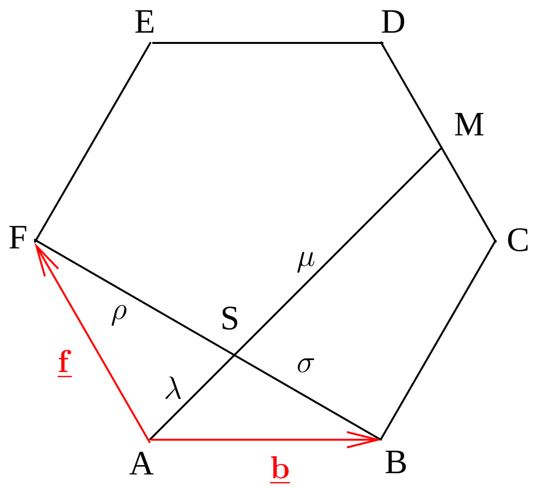
$$\underline{\mathbf{b}}_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} , \ \underline{\mathbf{b}}_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

sei *positiv* orientiert, falls $a \cdot d - b \cdot c > 0$ und andernfalls *negativ* orientiert[1]. Ist also $\underline{\mathbf{b}}_1 = \underline{\mathbf{v}}_1$, $\underline{\mathbf{b}}_2 = \underline{\mathbf{v}}_2$ eine *positiv orientierte* Basis, so ist $\underline{\mathbf{c}}_1 = \underline{\mathbf{v}}_2$, $\underline{\mathbf{c}}_2 = \underline{\mathbf{v}}_1$ eine *negativ orientierte* Basis und umgekehrt.

positiv/negativ orientiert

[1] ganz pedantisch müsste man sagen *„postitiv/negativ orientiert bzgl. der Standardbasis“*

Aufgabe



Gegeben sei ein reguläres Sechseck (lauter gleichlange Seiten, gleichgrosse Winkel) und M sei der Mittelpunkt der Seite $\overline{CD}$. Wir möchten wissen, in welchem Verhältnis $\lambda : \mu$ bzw. $\rho : \sigma$ sich die „Diagonalen" $\overline{AM}$ bzw. $\overline{FB}$ in S schneiden. Wir bemerken: λ, μ, ρ, σ sind in dieser Skizze Verhältniszahlen und keine absoluten Längen.

Lösung

Wir haben

$$\overrightarrow{AS} = \lambda \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AF} + \rho \cdot \overrightarrow{FB}$$

und drücken nun alles in der Basis $\underline{\mathbf{b}}$, $\underline{\mathbf{f}}$ aus. Es ist $\overrightarrow{AM} = 2 \cdot \underline{\mathbf{b}} + \frac{3}{2} \cdot \underline{\mathbf{f}}$, $\overrightarrow{AF} = \underline{\mathbf{f}}$ und $\overrightarrow{FB} = \underline{\mathbf{b}} - \underline{\mathbf{f}}$. Daher haben wir

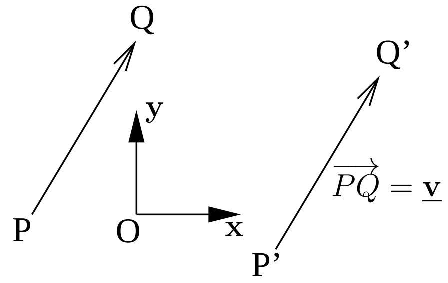
$$\lambda \cdot (2 \cdot \underline{\mathbf{b}} + \frac{3}{2} \cdot \underline{\mathbf{f}}) = \underline{\mathbf{f}} + \rho \cdot (\underline{\mathbf{b}} - \underline{\mathbf{f}}) \text{ oder } (2\lambda - \rho) \cdot \underline{\mathbf{b}} + (\frac{3}{2}\lambda + \rho - 1) \cdot \underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{0}}.$$

Da $\underline{\mathbf{b}}$ und $\underline{\mathbf{f}}$ als Basisvektoren *linear unabhängig* sind, hat der Nullvektor die eindeutige Darstellung $\underline{\mathbf{0}} = 0 \cdot \underline{\mathbf{b}} + 0 \cdot \underline{\mathbf{f}}$. Also gilt $2\lambda - \rho = 0 = \frac{3}{2}\lambda + \rho - 1$ und daher $\lambda = 2/7$, $\rho = 4/7$. Also ergibt sich

$$\lambda : \mu = 2 : 5 \text{ und } \rho : \sigma = 4 : 3 \ . \qquad \square$$

Wir bemerken, dass uns die dem Problem angepasste Basis $\underline{\mathbf{b}}$, $\underline{\mathbf{f}}$ hier einen Haufen Rechnerei erspart.

3.1.2 Vektoren als Aequivalenzklassen von Punktepaaren



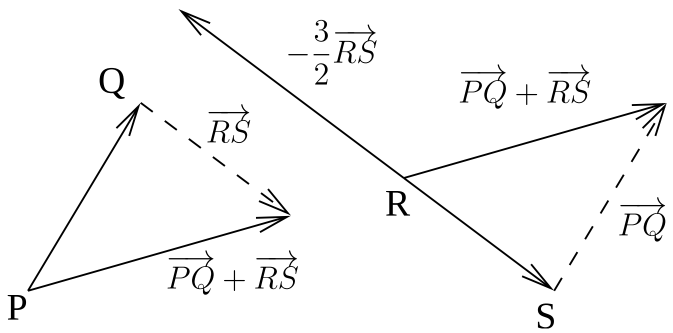
Sind $P(x|y)$ und $Q(\tilde{x}|\tilde{y})$ zwei Punkte in der Ebene (mit Koordinaten bzgl. eines festen xy–Koordinatensystems), so lässt sich der Vektor $\underline{\mathbf{v}}$,

$$\underline{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x} - x \\ \tilde{y} - y \end{pmatrix} = \overrightarrow{PQ}$$

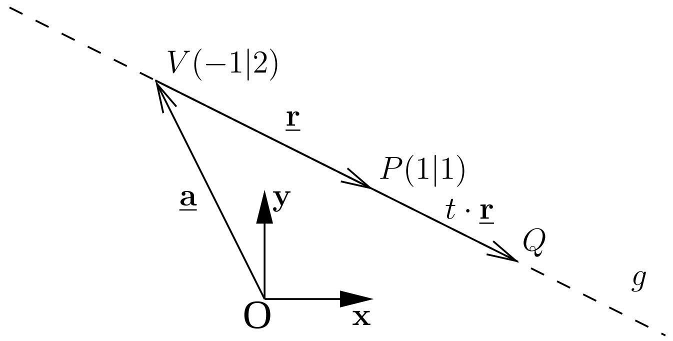
geometrisch repräsentieren oder „veranschaulichen" als Pfeil mit Ausgangspunkt P und Spitze in Q. Alle anderen Punktepaare P', Q' repräsentieren allerdings den gleichen Vektor, sofern der Pfeil mit Ausgangspunkt $P'(x'|y')$ und Spitze in $Q'(\tilde{x}'|\tilde{y}')$ die gleiche Länge und die gleiche Richtung hat, mit anderen Worten: sofern

$$(\tilde{x}' - x' = \tilde{x} - x) \wedge (\tilde{y}' - y' = \tilde{y} - y)\ .$$

Geometrisch ist ein Vektor also eine <u>*Aequivalenzklasse*</u> repräsentiert durch Punkte- Aequivalenzklasse
<u>*paare*</u>, etwa analog den rationalen Zahlen, die durch Zahlen*paare* repräsentiert werden, $3/12 = 1/4 = -2/(-8) = \ldots$. Zur Unterscheidung schreiben wir die Komponenten eines Vektors deshalb zunächst auch *übereinander* statt nebeneinander, wie bei Punkten. Zur Notation von Vektoren verwenden wir neben fetten unterstrichenen Buchstaben $\underline{\mathbf{v}}$ auch einen Pfeil über einem repräsentierenden Punktepaar, $\underline{\mathbf{v}} = \overrightarrow{PQ}$. Einen *eindeutigen* Repräsentanten (analog der gekürzten Darstellung einer rationalen Zahl) erhält man, indem man für den Ausgangspunkt P jedes Vektorpfeils immer den gleichen festen Punkt, z.B. $O(0|0)$, den *Ursprung* des Koordinatensystems, wählt. Durch einen solchen Repräsentanten ist dann jedem Vektor $\overrightarrow{OQ}$ auch ein eindeutiger Punkt Q zugeordnet und man nennt $\overrightarrow{OQ}$ den <u>*Ortsvektor*</u> des Punktes Ortsvektor
Q. Oft schreibt man dafür auch einfach $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{Q}$.
Wie gesagt, die Addition von Vektoren wird geometrisch durch die sog. *Parallelogrammregel* umgesetzt, die skalare Multiplikation mittels Streckung.



3.1.3 Geraden in der Ebene



Die *Parameterdarstellung* von g in der Skizze auf S.2 (Lösungsmenge von $x+2y=3$) Parameterdarstellung einer Geraden

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{a}} + t \cdot \underline{\mathbf{r}}$$

lässt sich wie folgt geometrisch interpretieren. Der erste Vektor auf der rechten Seite ist der Ortsvektor $\underline{\mathbf{a}} = \overrightarrow{OV}$ des Punktes $V(-1|2) \in g$, man nennt ihn in diesem Zusammenhang auch einen *Aufvektor* für die Parameterdarstellung. Der zweite Vektor auf der rechten Seite kann z.B. durch das Punktepaar V und $P(1|1)$ repräsentiert werden, da Aufvektor

$$\underline{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-(-1) \\ 1-2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{VP} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OV}$$

gilt. Man nennt $\underline{\mathbf{r}}$ einen *Richtungsvektor* der Geraden g. Richtungsvektor
Die Vektorgleichung der Parameterdarstellung besagt in dieser Interpretation, dass man durch Addition des Aufvektors und eines beliebig gestreckten Richtungsvektors (Streckungsfaktor t) genau die Ortsvektoren $\overrightarrow{OQ}$ aller Punkte $Q(x|y) \in g$ erhält,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \overrightarrow{OQ} = \underline{\mathbf{a}} + t \cdot \underline{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

Nun ist es offensichtlich, dass man die gleichen Punkte Q bzw. ihre Ortsvektoren $\overrightarrow{OQ}$ auch erhält, indem man einen anderen Aufvektor $\underline{\mathbf{b}}$ wählt und/oder einen anderen Richtungsvektor $\underline{\mathbf{q}}$ (der natürlich immer noch in Richtung von g zeigen muss)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \overrightarrow{OQ} = \underline{\mathbf{b}} + r \cdot \underline{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} .$$

Es ist also nicht so ohne weiteres möglich zu sehen ob zwei verschiedene Parameterdarstellungen die gleichen Geraden beschreiben. Dies ist ganz analog zur Parameterdarstellung $\mathbb{L}$ und $\widetilde{\mathbb{L}}$ der Lösungsmengen auf S.2.

Aufgabe
Gib notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, dass zwei Parameterdarstellungen die gleiche Gerade beschreiben.

Umgekehrt erhält man durch Elimination des Parameters die (bis auf ein Vielfaches) eindeutige Geradengleichung. Aus der ersten Parameterdarstellung oben folgt z.B.

$$x = -1 + 2t \text{ und } y = 2 - t.$$

Aus der letzten Gleichung folg $t = 2 - y$, was wir in die erste Gleichung einsetzen,

$$x = -1 + 2 \cdot (2 - y) = 3 - 2y \text{ oder } x + 2y = 3 \ .$$

Die gleiche Gleichung (evtl. bis auf ein Vielfaches) erhalten wir aus $x = 3 + s$ und $y = -s/2$ durch Elimination des Parameters s weiter oben.

3.1.4 Das Skalarprodukt

Definition Skalarprodukt

Wir definieren das (standard) Sklaraprodukt zweier Vektoren $\underline{\mathbf{v}}$, $\underline{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^2$,

$$\underline{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \ \underline{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \ \Rightarrow \ \langle\, \underline{\mathbf{v}} \mid \underline{\mathbf{w}} \,\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right\rangle = x \cdot x' + y \cdot y' \in \mathbb{R} \ .$$

Oft schreibt man dafür auch $\underline{\mathbf{v}} \bullet \underline{\mathbf{w}}$. Mit Pythagoras entspricht das Skalarprodukt eines Vektors $\underline{\mathbf{v}}$ mit sich selbst

$$\langle\, \underline{\mathbf{v}} \mid \underline{\mathbf{v}} \,\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = x \cdot x + y \cdot y = |\underline{\mathbf{v}}|^2 \geq 0$$

dem Quadrat seiner Länge. Hat auch das Skalarprodukt zweier verschiedener Vektoren eine geometrische Interpretation? Ja, es gilt der folgende

Satz geometrische Interpretation

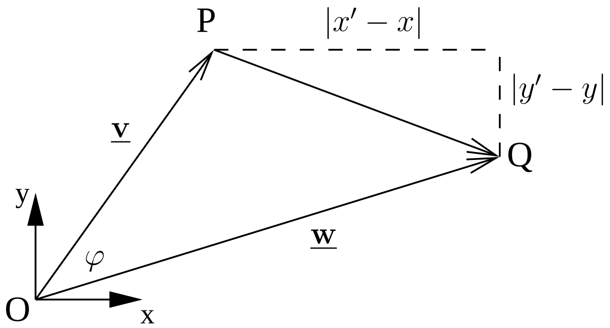
Das (standard) Skalarprodukt zweier Vektoren ist das Produkt ihrer Längen mal der Cosinus ihres Zwischenwinkels φ,

$$\langle\, \underline{\mathbf{v}} \mid \underline{\mathbf{w}} \,\rangle = |\underline{\mathbf{v}}| \cdot |\underline{\mathbf{w}}| \cdot \cos(\varphi) \ .$$

Bemerkungen zum Skalarprodukt

Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist also genau dann 0, wenn sie einen rechten Winkel einschliessen (oder mindestens einer der Vektoren der Nullvektor $\underline{\mathbf{0}}$ ist). Das Skalarprodukt ist genau dann negativ, wenn sie einen stumpfen Winkel einschliessen. Gilt $\langle\, \underline{\mathbf{v}} \mid \underline{\mathbf{w}} \,\rangle = 0$, so sagt man, die Vektoren $\underline{\mathbf{v}}$ und $\underline{\mathbf{w}}$ stehen *senkrecht* oder sind zueinander *orthogonal* und schreibt auch $\underline{\mathbf{v}} \perp \underline{\mathbf{w}}$. Der Nullvektor $\underline{\mathbf{0}}$ ist orthogonal zu allen Vektoren, $\forall\, \underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^2 : \underline{\mathbf{v}} \perp \underline{\mathbf{0}}$. orthogonale Vektoren

Beweis mit Hilfe des Cosinussatzes



Seien $P(x|y)$ und $Q(x'|y')$ zwei Punkte mit ihren (cartesischen) Koordinaten und $\underline{\mathbf{v}} = \overrightarrow{OP}$ und $\underline{\mathbf{w}} = \overrightarrow{OQ}$. Die Länge des Vektors $\overrightarrow{PQ}$ $(= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = \underline{\mathbf{w}} - \underline{\mathbf{v}})$, also die Länge der Strecke $\overline{PQ}$ ist nach Pythagoras

$$|\overline{PQ}| = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2} = |\overrightarrow{PQ}|$$

(unabhängig vom repräsentierenden Punktepaar (P, Q)).
Nach dem Cosinussatz für Dreiecke[2] gilt nun

$$(x'-x)^2 + (y'-y)^2 = |\overrightarrow{PQ}|^2 = |\overrightarrow{OP}|^2 + |\overrightarrow{OQ}|^2 - 2 \cdot |\overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{OQ}| \cdot \cos(\varphi) \ ,$$

wobei $\varphi = \sphericalangle POQ$ der zwischen den Vektoren $\overrightarrow{OP}$ und $\overrightarrow{OQ}$ eingeschlossene Winkel ist. Auf beiden Seiten dieser Gleichung subtrahieren wir nun $|\overrightarrow{OP}|^2 = x^2 + y^2$ und $|\overrightarrow{OQ}|^2 = (x')^2 + (y')^2$ und lösen sodann nach $|\overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{OQ}| \cdot \cos(\varphi) = |\underline{\mathbf{v}}| \cdot |\underline{\mathbf{w}}| \cdot \cos(\varphi)$ auf. Wir erhalten nach vollständiger Vereinfachung

$$|\underline{\mathbf{v}}| \cdot |\underline{\mathbf{w}}| \cdot \cos(\varphi) = |\overrightarrow{OP}| \cdot |\overrightarrow{OQ}| \cdot \cos(\varphi) = x \cdot x' + y \cdot y' \ .$$

□

1. Anwendung: Normalenvektoren von Geraden
Die drei Geraden auf S.2 haben Geradengleichungen

$$g\colon 1 \cdot x + 2 \cdot y = 3 \quad , \quad h\colon 1 \cdot x - 5 \cdot y = -6 \quad \text{und} \quad j\colon 2 \cdot x - y = -6$$

(oder Vielfache davon). Zeichnet man zur Geradengleichung $a \cdot x + b \cdot y = c$ jeweils die Koeffizientenvektoren

$$\underline{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \ , \text{ also } \underline{\mathbf{n}}_g = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \ , \ \underline{\mathbf{n}}_h = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ und } \underline{\mathbf{n}}_j = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \ ,$$

auch in die Figur ein, so stellt man fest, dass diese senkrecht auf der jeweiligen Geraden stehen. Wir wollen uns nun überlegen, dass dies immer so ist. Sei also eine Koeffizientenvektor senkrecht auf Gerade

[2] Dieser besagt: $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)$ mit den üblichen Bezeichnungen, siehe S.43.

Geradengleichung

$$g\colon a \cdot x + b \cdot y = c \quad (\text{mit } (a|b) \neq (0|0)\ )$$

gegeben und seien $P(x_1|y_1)$ und $Q(x_2|y_2)$ zwei Punkte auf dieser Geraden g, also

$$a \cdot x_1 + b \cdot y_1 = c = a \cdot x_2 + b \cdot y_2 \ .$$

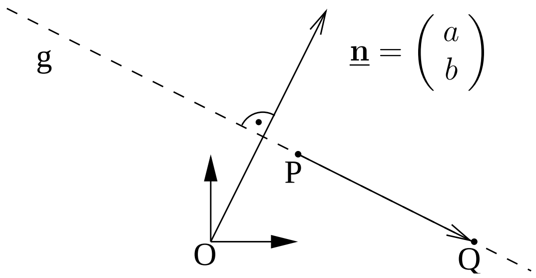
Subtraktion der linken von der rechten Seite und Ausklammern von a und b ergibt

$$a \cdot (x_2 - x_1) + b \cdot (y_2 - y_1) = c - c = 0 \ .$$

Dies bedeutetd aber genau, dass der Koeffizientenvektor $\underline{\mathbf{n}}$ senkrecht auf $\overrightarrow{PQ}$ steht,

$$\left\langle \underline{\mathbf{n}} \,\middle|\, \overrightarrow{PQ} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \,\middle|\, \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} \right\rangle = a \cdot (x_2 - x_1) + b \cdot (y_2 - y_1) = 0,$$

also senkrecht auf der Geraden (die ja Richtungsvektor $\overrightarrow{PQ}$ hat).



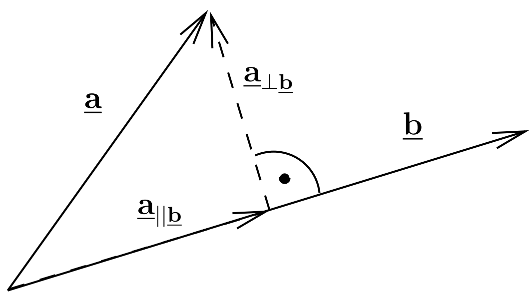
2. Anwendung: Projektionsformel

Gegeben seien zwei Vektoren $\underline{\mathbf{a}} \neq \underline{\mathbf{0}} \neq \underline{\mathbf{b}}$. Wir wollen nun einen der beiden, z.B. $\underline{\mathbf{a}}$, zerlegen in einen Vektor parallel zum anderen, also parallel zu $\underline{\mathbf{b}}$ und in einen Vektor senkrecht zu $\underline{\mathbf{b}}$. Die Rollen von $\underline{\mathbf{a}}$ und $\underline{\mathbf{b}}$ können natürlich auch vertauscht werden. Zudem ist geometrisch klar, dass diese Zerlegung eindeutig ist. Die Komponente $\underline{\mathbf{a}}_{||\underline{\mathbf{b}}}$ von $\underline{\mathbf{a}}$ parallel zu $\underline{\mathbf{b}}$ heisst *senkrechte Projektion* von $\underline{\mathbf{a}}$ auf $\underline{\mathbf{b}}$. Die Formeln lauten:

senkrechte Projektion eines Vektors auf einen anderen

— senkrechte Projektion von $\underline{\mathbf{a}}$ auf $\underline{\mathbf{b}}$: $\quad \underline{\mathbf{a}}_{||\underline{\mathbf{b}}} = \dfrac{\langle \underline{\mathbf{a}} | \underline{\mathbf{b}} \rangle}{\langle \underline{\mathbf{b}} | \underline{\mathbf{b}} \rangle} \cdot \underline{\mathbf{b}},$

— Komponente von $\underline{\mathbf{a}}$ senkrecht zu $\underline{\mathbf{b}}$: $\quad \underline{\mathbf{a}}_{\perp\underline{\mathbf{b}}} = \underline{\mathbf{a}} - \dfrac{\langle \underline{\mathbf{a}} | \underline{\mathbf{b}} \rangle}{\langle \underline{\mathbf{b}} | \underline{\mathbf{b}} \rangle} \cdot \underline{\mathbf{b}} \ .$



Mittels der Rechengesetze für das Skalarprodukt lässt sich z.B. $\underline{\mathbf{a}}_{||\underline{\mathbf{b}}} \perp \underline{\mathbf{a}}_{\perp\underline{\mathbf{b}}}$, also $\left\langle\, \underline{\mathbf{a}}_{||\underline{\mathbf{b}}} \mid \underline{\mathbf{a}}_{\perp\underline{\mathbf{b}}} \,\right\rangle = 0$ nachrechnen. (Wir geben die benötigten Rechengesetze für das Skalarprodukt in Klammern an. Dabei seien $\lambda \in \mathbb{R}$, $\underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{w}}, \underline{\mathbf{u}} \in \mathbb{R}^2$):

$$\begin{aligned}
\left\langle\, \underline{\mathbf{a}}_{||\underline{\mathbf{b}}} \mid \underline{\mathbf{a}}_{\perp\underline{\mathbf{b}}} \,\right\rangle &= \left\langle\, \frac{\langle\, \underline{\mathbf{a}} \mid \underline{\mathbf{b}} \,\rangle}{\langle\, \underline{\mathbf{b}} \mid \underline{\mathbf{b}} \,\rangle} \cdot \underline{\mathbf{b}} \mid \underline{\mathbf{a}} - \frac{\langle\, \underline{\mathbf{a}} \mid \underline{\mathbf{b}} \,\rangle}{\langle\, \underline{\mathbf{b}} \mid \underline{\mathbf{b}} \,\rangle} \cdot \underline{\mathbf{b}} \,\right\rangle \quad \text{(obige Formeln eingesetzt)} \\
&= \frac{\langle\, \underline{\mathbf{a}} \mid \underline{\mathbf{b}} \,\rangle}{\langle\, \underline{\mathbf{b}} \mid \underline{\mathbf{b}} \,\rangle} \cdot \left\langle\, \underline{\mathbf{b}} \mid \underline{\mathbf{a}} - \frac{\langle\, \underline{\mathbf{a}} \mid \underline{\mathbf{b}} \,\rangle}{\langle\, \underline{\mathbf{b}} \mid \underline{\mathbf{b}} \,\rangle} \cdot \underline{\mathbf{b}} \,\right\rangle \quad (\, \langle\, \lambda \cdot \underline{\mathbf{v}} \mid \underline{\mathbf{w}} \,\rangle = \lambda \cdot \langle\, \underline{\mathbf{v}} \mid \underline{\mathbf{w}} \,\rangle \,) \\
&= \frac{\langle\, \underline{\mathbf{a}} \mid \underline{\mathbf{b}} \,\rangle}{\langle\, \underline{\mathbf{b}} \mid \underline{\mathbf{b}} \,\rangle} \cdot \langle\, \underline{\mathbf{b}} \mid \underline{\mathbf{a}} \,\rangle - \frac{\langle\, \underline{\mathbf{a}} \mid \underline{\mathbf{b}} \,\rangle^2}{\langle\, \underline{\mathbf{b}} \mid \underline{\mathbf{b}} \,\rangle^2} \cdot \langle\, \underline{\mathbf{b}} \mid \underline{\mathbf{b}} \,\rangle \quad (\, \langle\, \underline{\mathbf{v}} \mid \underline{\mathbf{w}} + \lambda \cdot \underline{\mathbf{u}} \,\rangle = \\
&\qquad\qquad = \langle\, \underline{\mathbf{v}} \mid \underline{\mathbf{w}} \,\rangle + \lambda \cdot \langle\, \underline{\mathbf{v}} \mid \underline{\mathbf{u}} \,\rangle \,) \\
&= \frac{\langle\, \underline{\mathbf{a}} \mid \underline{\mathbf{b}} \,\rangle}{\langle\, \underline{\mathbf{b}} \mid \underline{\mathbf{b}} \,\rangle} \cdot \langle\, \underline{\mathbf{a}} \mid \underline{\mathbf{b}} \,\rangle - \frac{\langle\, \underline{\mathbf{a}} \mid \underline{\mathbf{b}} \,\rangle^2}{\langle\, \underline{\mathbf{b}} \mid \underline{\mathbf{b}} \,\rangle} = 0\,. \quad (\, \langle\, \underline{\mathbf{v}} \mid \underline{\mathbf{w}} \,\rangle = \langle\, \underline{\mathbf{w}} \mid \underline{\mathbf{v}} \,\rangle \,)
\end{aligned}$$

Das letzte Rechengesetz ist die *Symmetrie* des Skalarproduktes. Die beiden anderen Rechengesetze besagen, dass das Skalarprodukt *linear* ist (in beiden Argumenten). *Linearität* werden wir später noch genau definieren und noch häufig antreffen. Es ist hier etwas leicht anderes gemeint, als wo wir von „linearen Gleichungen“ sprachen.

3. Anwendung: Abstand eines Punktes von einer Geraden

Setzt man die Koordinaten eines beliebigen Punktes $Q(x|y)$ in die linke Seite einer Geradengleichung $g\colon a \cdot x + b \cdot y = c$ ein, so erhält man nach unserem Satz oben

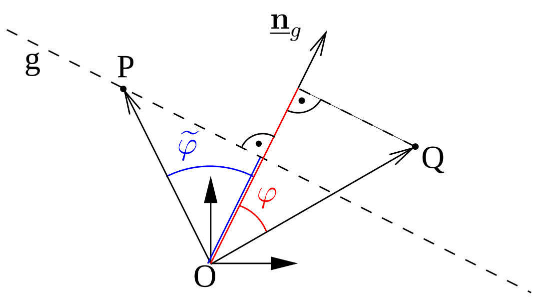
$$a \cdot x + b \cdot y = \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle = |\underline{\mathbf{n}}_g| \cdot |\overrightarrow{OQ}| \cdot \cos(\varphi) \quad \text{wobei } \underline{\mathbf{n}}_g = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

ein Normalenvekktor zur Geraden g (Anwendung 1) ist. Teilt man dies noch durch $|\underline{\mathbf{n}}_g| = \sqrt{a^2 + b^2}$, so erhält man (bis auf ein Vorzeichen) die Länge der senkrechten Projektion von $\overrightarrow{OQ}$ auf $\underline{\mathbf{n}}_g$, siehe untenstehende Figur,

$$\frac{a \cdot x + b \cdot y}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|\underline{\mathbf{n}}_g| \cdot |\overrightarrow{OQ}| \cdot \cos(\varphi)}{|\underline{\mathbf{n}}_g|} = |\overrightarrow{OQ}| \cdot \cos(\varphi)\,.$$

Ist $P(x|y)$ zufällig ein Punkt auf g, so ist dies (bis auf ein Vorzeichen) gerade der Abstand der Geraden g vom Ursprung,

$$\frac{a \cdot x + b \cdot y}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = |\overrightarrow{OP}| \cdot \cos(\widetilde{\varphi})\,.$$



Das Vorzeichen ist positiv, falls der Ursprung auf der anderen Seite von g liegt, auf die $\underline{\mathbf{n}}_g$ zeigt. Ist nun $Q(x|y)$ wieder ein allgemeiner Punkt, so ist offenbar die Differenz

$$|\overrightarrow{OQ}| \cdot \cos(\varphi) - |\overrightarrow{OP}| \cdot \cos(\widetilde{\varphi}) = \frac{a \cdot x + b \cdot y}{\sqrt{a^2+b^2}} - \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{a \cdot x + b \cdot y - c}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

(bis auf ein Vorzeichen) gerade der Abstand von Q zur Geraden g. Das Vorzeichen ist positiv, wenn der Punkt Q auf derjenigen Seite von g liegt, in die der Normalenvektor $\underline{\mathbf{n}}_g$ zeigt. In diesem Zusammenhang spricht man von der Abstand eines Punktes von einer Geraden

Hesseschen Normalform einer Geradengleichung
Bringt man in der Geradengleichung $g\colon a \cdot x + b \cdot y = c$ alles auf die linke Seite, $a \cdot x + b \cdot y - c = 0$ und dividiert dann noch durch $\sqrt{a^2+b^2}$, so verschwindet

$$\frac{a \cdot x + b \cdot y - c}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad (\textit{Hessesche Normalform:} = 0)$$

genau für die Punkte $P(x|y)$ auf der Geraden g und für einen beliebigen Punkt $Q(x|y)$ ist diese Grösse gerade der *Abstand* von Q zur Geraden g (bis auf ein Vorzeichen, das positiv ist, wenn Q auf derjenigen Seite von g liegt, auf die der Normalenvektor $\underline{\mathbf{n}}_g$ gebildet aus den Koeffizienten a und b zeigt). +/− Abstand eines Punktes von einer Geraden

Aufgabe
Bestimme des Abstand des Punktes $Q(1|2)$ von der Geraden $g\colon 3 \cdot x + 4 \cdot y = 5$.
Die Gerade $l\colon 4 \cdot x - 3 \cdot y = -2$ ist das Lot durch Q auf g. Bestimme den Lotfusspunkt $L = g \cap l$ und berechne $|\overrightarrow{QL}|$, den Abstand von Q zu g, auch nach Pythagoras. Skizze!

3.1.5 Determinante, Flächenprodukt

Definition Determinante

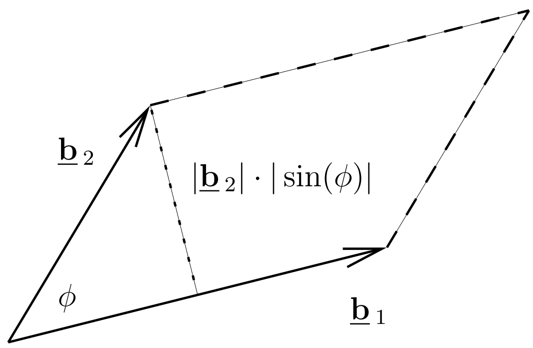
Wir definieren

$$\det(\underline{\mathbf{b}}_1, \underline{\mathbf{b}}_2) = \det\left(\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}\right) := a \cdot d - b \cdot c \in \mathbb{R}$$

und nennen dies die *Determinante* der zwei (Spalten–)Vektoren $\underline{\mathbf{b}}_1$ und $\underline{\mathbf{b}}_2$.

Geometrisch nennt man dies auch das *Flächenprodukt* der beiden Vektoren, da für den Flächeninhalt $\mathcal{F}$ des von $\underline{\mathbf{b}}_1$ und $\underline{\mathbf{b}}_2$ aufgespannten Parallelogrammes gilt (siehe nachfolgende Skizze)

$$\begin{aligned} |\mathcal{F}|^2 &= |\underline{\mathbf{b}}_1|^2 \cdot |\underline{\mathbf{b}}_2|^2 \cdot \underbrace{\sin(\phi)^2}_{1-\cos(\phi)^2} = |\underline{\mathbf{b}}_1|^2 \cdot |\underline{\mathbf{b}}_2|^2 - \underbrace{\langle\, \underline{\mathbf{b}}_1 \mid \underline{\mathbf{b}}_2 \,\rangle^2}_{(|\underline{\mathbf{b}}_1| \cdot |\underline{\mathbf{b}}_2| \cdot \cos(\phi))^2} \quad \text{(siehe Satz S.53)} \\ &= (a^2+c^2)(b^2+d^2) - (a \cdot b + c \cdot d)^2 = \cdots = (a \cdot d - b \cdot c)^2 \ . \end{aligned}$$



Das Vorzeichen von $\det(\underline{\mathbf{b}}_1, \underline{\mathbf{b}}_2) = -\det(\underline{\mathbf{b}}_2, \underline{\mathbf{b}}_1)$ gibt an, ob $\underline{\mathbf{b}}_1$, $\underline{\mathbf{b}}_2$ in dieser Reihenfolge positiv $(+)$ oder negativ $(-)$ orientiert sind, falls $\mathcal{F} \neq 0$. Fläche mit Vorzeichen

Aufgabe
Interpretiere $\det(\underline{\mathbf{b}}_1, \underline{\mathbf{b}}_2 + r \cdot \underline{\mathbf{b}}_1) = \det(\underline{\mathbf{b}}_1, \underline{\mathbf{b}}_2) = \det(\underline{\mathbf{b}}_1 + r \cdot \underline{\mathbf{b}}_2, \underline{\mathbf{b}}_2)$ für alle $r \in \mathbb{R}$.
Ebenso $\det(\underline{\mathbf{b}}_1, r \cdot \underline{\mathbf{b}}_2) = r \cdot \det(\underline{\mathbf{b}}_1, \underline{\mathbf{b}}_2) = \det(r \cdot \underline{\mathbf{b}}_1, \underline{\mathbf{b}}_2)$.
Ebenso $\det(\underline{\mathbf{b}}_1 + \underline{\mathbf{b}}_2, \underline{\mathbf{b}}) = \det(\underline{\mathbf{b}}_1, \underline{\mathbf{b}}) + \det(\underline{\mathbf{b}}_2, \underline{\mathbf{b}})$.
Argumentiere geometrisch über die Interpretation als Fläche. (Skizzen!)

Cramersche[3] Regel
Die Formeln für r_1 und r_2 auf S.49 lassen sich mit Hilfe von $\det(\,.\,,\,.\,)$ auch handlich schreiben. Falls $\det(\underline{\mathbf{b}}_1, \underline{\mathbf{b}}_2) \neq 0$, so gilt

$$\underline{\mathbf{x}} = r_1 \cdot \underline{\mathbf{b}}_1 + r_2 \cdot \underline{\mathbf{b}}_2 \quad \Leftrightarrow \quad r_1 = \frac{\det(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{b}}_2)}{\det(\underline{\mathbf{b}}_1, \underline{\mathbf{b}}_2)}\ ,\ r_2 = \frac{\det(\underline{\mathbf{b}}_1, \underline{\mathbf{x}})}{\det(\underline{\mathbf{b}}_1, \underline{\mathbf{b}}_2)}\ .$$

Falls jedoch $\det(\underline{\mathbf{b}}_1, \underline{\mathbf{b}}_2) = 0$, so sind $\det(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{b}}_2)$ und $\det(\underline{\mathbf{b}}_1, \underline{\mathbf{x}})$ beide $= 0$ oder beide $\neq 0$, falls weder $\underline{\mathbf{b}}_1$ noch $\underline{\mathbf{b}}_2$ der Nullvektor ist. Im ersten Fall hat $\underline{\mathbf{x}} = r_1 \cdot \underline{\mathbf{b}}_1 + r_2 \cdot \underline{\mathbf{b}}_2$ beliebig viele Lösungen (r_1, r_2), im zweiten Fall keine. Das Lösungsverhalten des entsprechenden Gleichungssystemes wurde in Unterabschnitt 1.3.1 besprochen.
(Man betrachte auch den Fall, wo $\underline{\mathbf{b}}_1$ oder $\underline{\mathbf{b}}_2$ der Nullvektor ist, oder beide.)

Darstellung in einer **Orthonormalbasis**
Sind $\underline{\mathbf{b}}_1$, $\underline{\mathbf{b}}_2$ *orthonormal*, also $\langle\, \underline{\mathbf{b}}_i \mid \underline{\mathbf{b}}_j \,\rangle = \delta_{ij}$ ($= 1$ falls $i = j$ und 0 sonst) und gilt orthonormale Basis

$$\underline{\mathbf{x}} = r_1 \cdot \underline{\mathbf{b}}_1 + r_2 \cdot \underline{\mathbf{b}}_2$$

so lassen sich die Koordinaten r_1 und r_2 in dieser Basis besonders einfach berechnen. Mit den Rechengesetzen des Skalarproduktes gilt nämlich

$$\begin{aligned} r_1 &= r_1 \cdot 1 + r_2 \cdot 0 = r_1 \cdot \langle\, \underline{\mathbf{b}}_1 \mid \underline{\mathbf{b}}_1 \,\rangle + r_2 \cdot \langle\, \underline{\mathbf{b}}_2 \mid \underline{\mathbf{b}}_1 \,\rangle = \langle\, \underbrace{r_1 \cdot \underline{\mathbf{b}}_1 + r_2 \cdot \underline{\mathbf{b}}_2}_{=\underline{\mathbf{x}}} \mid \underline{\mathbf{b}}_1 \rangle\ , \\ r_2 &= \cdots = \langle\, \underline{\mathbf{x}} \mid \underline{\mathbf{b}}_2 \,\rangle \text{ (ebenso)}\ . \end{aligned}$$

[3]Nach G.Cramer (1750) *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, Anhang 1.

Definition duale Bais

Zu jeder Basis $\underline{\mathbf{b}}_1$, $\underline{\mathbf{b}}_2$ gibt es eine eindeutige *duale Basis* $\underline{\mathbf{d}}_1$, $\underline{\mathbf{d}}_2$, so dass

$$\langle \underline{\mathbf{b}}_i \,|\, \underline{\mathbf{d}}_j \rangle = \delta_{ij} \ .$$

Mit einer Herleitung wie bei der Orthonormalbasis oben gilt dann

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{x}} &= r_1 \cdot \underline{\mathbf{b}}_1 + r_2 \cdot \underline{\mathbf{b}}_2 \quad \text{mit } r_1 = \langle \underline{\mathbf{x}} \,|\, \underline{\mathbf{d}}_1 \rangle \,, r_2 = \langle \underline{\mathbf{x}} \,|\, \underline{\mathbf{d}}_2 \rangle \ , \\ &= s_1 \cdot \underline{\mathbf{d}}_1 + s_2 \cdot \underline{\mathbf{d}}_2 \quad \text{mit } s_1 = \langle \underline{\mathbf{x}} \,|\, \underline{\mathbf{b}}_1 \rangle \,, s_2 = \langle \underline{\mathbf{x}} \,|\, \underline{\mathbf{b}}_2 \rangle \ . \end{aligned}$$

Die zu einer orthonormalen Basis $\underline{\mathbf{b}}_1$, $\underline{\mathbf{b}}_2$ duale Basis ist offenbar $\underline{\mathbf{d}}_1 = \underline{\mathbf{b}}_1$, $\underline{\mathbf{d}}_2 = \underline{\mathbf{b}}_2$. Im allgemeinen findet man, dass folgende Basen zueinander dual sind

$$\underline{\mathbf{b}}_1 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \ \underline{\mathbf{b}}_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \leftarrow \textit{dual zu} \rightarrow \underline{\mathbf{d}}_1 = \frac{1}{\det(\underline{\mathbf{b}}_1, \underline{\mathbf{b}}_2)} \begin{pmatrix} d \\ -b \end{pmatrix} , \ \underline{\mathbf{d}}_2 = \frac{1}{\det(\underline{\mathbf{b}}_1, \underline{\mathbf{b}}_2)} \begin{pmatrix} -c \\ a \end{pmatrix} ,$$

und rechnet mit der Cramerschen Regel z.B. $r_1 = \dfrac{\det(\underline{\mathbf{x}}, \underline{\mathbf{b}}_2)}{\det(\underline{\mathbf{b}}_1, \underline{\mathbf{b}}_2)} = \langle \underline{\mathbf{x}} \,|\, \underline{\mathbf{d}}_1 \rangle$ nach.

3.2 Vektoren im Raum

3.2.1 Definitionen und Rechengesetze

Definition Vektorraum $\mathbb{R}^3$

Der *Vektorraum $\mathbb{R}^3$ über dem Körper der reellen Zahlen* ist die Menge aller Vektoren

$$\underline{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

versehen mit der Operation

— der *Vektoraddition:* $\underline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\underline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow \underline{\mathbf{a}} + \underline{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} x+u \\ y+v \\ z+w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$,

— der *skalaren Multiplikation:* $r \in \mathbb{R}$, $\underline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow r \cdot \underline{\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} r \cdot x \\ r \cdot y \\ r \cdot z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$.

Die Rechengesetze sind identisch mit denen der Definition auf S.47

Wiederum kann ein Vektor $\underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^3$ durch verschiedene Punktepaare $\underline{\mathbf{v}} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{P'Q'} = \ldots$ repräsentiert werden, sofern der Pfeil ausgehend vom Punkt P mit Spitze

in Q die gleiche Länge und Richtung hat, wie der Pfeil von P' nach Q'. Verlangt man, dass der Ausgangspunkt der Ursprung O sei, so erhält man einen eindeutigen Repräsentanten des Vektors $\underline{\mathbf{v}}$, nämlich als *Ortsvektor* des entsprechenden Punktes an seiner Pfeilspitze, vgl. Unterabschnitt 3.1.2.
Es gibt also eine enge Verwandtschaft zwischen den Punkten P im Raum, deren Koordinaten bezüglich eines fest gewählten (cartesischen) Koordinatensystems wir weiterhin mit

$$P(x|y|z)$$

bezeichnen und Ortsvektoren $\overrightarrow{OP}$ dieser Punkte als ausgezeichnete Repräsentanten von Vektoren, und gleichzeitig einen subtilen Unterschied dieser beiden Mengen, die wir darüberhinaus noch beide gleich, nämlich mit $\mathbb{R}^3$ bezeichnen.

Definition Basis von $\mathbb{R}^3$

Eine *Basis* des Vektorraumes $\mathbb{R}^3$ ist gegeben durch eine geordnete Folge von Vektoren, deren Linearkombinationen alle Vektoren in $\mathbb{R}^3$ *erzeugen* und die gleichzeitig *linear unabhängig* sind.

Bemerkung
Weniger als drei Vektoren sind im $\mathbb{R}^3$ nie erzeugend und mehr als drei nie linear unabhängig. Jede Basis des Vetorraumes $\mathbb{R}^3$ besteht also aus einer Folge von genau *drei* Vektoren, die übrigens genau dann erzeugend sind, wenn sie auch linear unabhägig sind. Wenn es für jeden Vektor $\underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^3$ Koeffizienten r_1, r_2 und $r_3 \in \mathbb{R}$ gibt, mit

$$\underline{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r_1 \cdot \underline{\mathbf{b}}_1 + r_2 \cdot \underline{\mathbf{b}}_2 + r_3 \cdot \underline{\mathbf{b}}_3 = r_1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + r_2 \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + r_3 \cdot \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix},$$

so nennt man das Vektorentripel $\underline{\mathbf{b}}_1$, $\underline{\mathbf{b}}_2$, $\underline{\mathbf{b}}_3$ *erzeugend* und die Koeffizienten sind dann automatisch für jeden Vektor $\underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^3$ eindeutig bestimmt, nämlich durch die eindeutige Lösung $(r_1|r_2|r_3)$ des entsprechenden linearen Gleichungssystems bestehend aus drei Gleichungen in den drei Variablen r_1, r_2 und r_3. Insbesondere gilt dies dann auch für $\underline{\mathbf{v}} = \underline{\mathbf{0}}$, den *Nullvektor*. Er hat dann eine und nur eine Darstellung $\underline{\mathbf{0}} = r_1 \cdot \underline{\mathbf{b}}_1 + r_2 \cdot \underline{\mathbf{b}}_2 + r_3 \cdot \underline{\mathbf{b}}_3$ als Linearkombination der drei Basisvektoren, nämlich mit $(r_1|r_2|r_3) = (0|0|0)$. Diese Eigenschaft definiert die *lineare Unabhängigkeit* von $\underline{\mathbf{b}}_1$, $\underline{\mathbf{b}}_2$ und $\underline{\mathbf{b}}_3$. Geometrisch bedeutet dies, dass $\underline{\mathbf{b}}_1$, $\underline{\mathbf{b}}_2$ und $\underline{\mathbf{b}}_3$ *nicht* in einer gemeinsamen Ebene liegen (wenn man sie als Ortsvektoren, d.h. von O ausgehend, repräsentiert). Gemäss den Formeln von Aufgabe 4 der Übung 2 bilden $\underline{\mathbf{b}}_1$, $\underline{\mathbf{b}}_2$, $\underline{\mathbf{b}}_3$ eine *Basis* in $\mathbb{R}^3$ genau dann wenn die *Determinante*

erzeugend

linear unabhängig

Determinante im $\mathbb{R}^3$

$$\det(\underline{\mathbf{b}}_1, \underline{\mathbf{b}}_2, \underline{\mathbf{b}}_3) = \left| \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \right| = \begin{array}{rl} & x_1 \cdot y_2 \cdot z_3 + x_2 \cdot y_3 \cdot z_1 + x_3 \cdot y_1 \cdot z_2 \\ - & x_1 \cdot y_3 \cdot z_2 - x_2 \cdot y_1 \cdot z_3 - x_3 \cdot y_2 \cdot z_1 \end{array}$$

nicht verschwindet. Wir werden später sehen, dass diese Grösse das (mit einem Vorzeichen) behaftete Volumen ist, das von den drei Vektoren $\underline{\mathbf{b}}_1$, $\underline{\mathbf{b}}_2$ und $\underline{\mathbf{b}}_3$ aufgespannt wird.

Definition

Orientierung im $\mathbb{R}^3$

Eine Basis $\underline{\mathbf{b}}_1, \underline{\mathbf{b}}_2, \underline{\mathbf{b}}_3$ heisst (in dieser Reihenfolge) *rechtshändig* oder *positiv orientiert*, falls die entsprechende Determinante positiv ist. Die Basis $\underline{\mathbf{b}}_1, \underline{\mathbf{b}}_3, \underline{\mathbf{b}}_2$ ist (in dieser Reihenfolge) dann *linkshändig* oder *negativ orientiert*, da allgemein gilt

$$\det(\underline{\mathbf{b}}_1, \underline{\mathbf{b}}_3, \underline{\mathbf{b}}_2) = -\det(\underline{\mathbf{b}}_1, \underline{\mathbf{b}}_2, \underline{\mathbf{b}}_3) \ .$$

Die Determinante ist eine sog. *alternierende* Funktion, d.h. jedes Vertauschen der Argumente ist mit einem Vorzeichenwechsel verbunden.

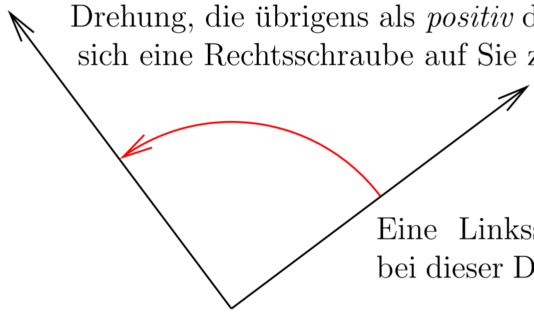
alternierende Funktion

Bemerkung

Wiederum müsste man von einer positiven oder negativen Orientierung *bzgl. der Standardbasis* sprechen, vgl. Fussnote auf S.49. Die Standardbasis wird in Bezug zu dem uns umgebenden Raum als positiv orientiert definiert, wenn ihre Basisvektoren in x–, y– und z–Richtung (in dieser Reihenfolge) Daumen, Zeigefinger und Mittelfinger (in dieser Reihenfolge) der *rechten* zu einem rechtwinkligen Fingertripel geformten Hand entsprechen. Ferner spricht man von einer *rechtsdrehenden* Schraube, wenn bei einem positiv orientierten cartesischen Koordinatensystem eine Verdrehung der positiven x–Achse in Richtung positiver y–Achse um die z–Achse eine Schraubenbewegung in Richtung positiver z–Achse resultiert. Nehmen Sie Ihre rechte Hand und vergewissern Sie Sich, dass der Wasserhahn auf Ihrer Toilette eine Rechtsschraube ist.

Rechtsschraube

Bei einer solchen Drehung, die übrigens als *positiv* definiert ist (Gegenuhrzeigersinn) bewegt sich eine Rechtsschraube auf Sie zu.



Eine Linksschraube bewegt sich bei dieser Drehung von Ihnen weg.

Definition

Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$

Das *(standard) Skalarprodukt* $\langle\, \underline{\mathbf{v}} \mid \underline{\mathbf{w}} \,\rangle \in \mathbb{R}$ zweier Vektoren $\underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^3$ ist gegeben durch

$$\underline{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} , \ \underline{\mathbf{w}} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \ \langle\, \underline{\mathbf{v}} \mid \underline{\mathbf{w}} \,\rangle = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{R}$$

analog zur entsprechenden Formel für das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^2$, siehe S.53. Weiterhin gilt (im cartesischen Koordinatensystem) die geometrische Interpretation

$$\langle\, \underline{\mathbf{v}} \mid \underline{\mathbf{w}} \,\rangle = |\underline{\mathbf{v}}| \cdot |\underline{\mathbf{w}}| \cdot \cos(\varphi) \ ,$$

wobei $|\underline{\mathbf{v}}|$ und $|\underline{\mathbf{w}}|$ die Längen der Vektoren sind, also

$$|\underline{\mathbf{v}}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \text{ und } |\underline{\mathbf{w}}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} \ ,$$

und φ ist der zwischen $\underline{\mathbf{v}}$ und $\underline{\mathbf{w}}$ eingeschlossene Winkel. Genau dann steht also $\underline{\mathbf{v}}$ senkrecht auf $\underline{\mathbf{w}}$, symbolisch $\underline{\mathbf{v}} \perp \underline{\mathbf{w}}$, wenn gilt $\langle\, \underline{\mathbf{v}} \,|\, \underline{\mathbf{w}} \,\rangle = 0$. (Der Nullvektor $\underline{\mathbf{0}}$ steht auf allen Vektoren senkrecht.) Wie bereits in den Rechnungen zur Anwendung auf S.55f benutzt, gelten für das Skalarprodukt die Rechneregeln (nachrechnen!)

- *Symmetrie:* $\langle\, \underline{\mathbf{v}} \,|\, \underline{\mathbf{w}} \,\rangle = \langle\, \underline{\mathbf{w}} \,|\, \underline{\mathbf{v}} \,\rangle$, für alle $\underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^3$,
- *Linearität im 1. Argument:* $\langle\, r \cdot \underline{\mathbf{u}} + \underline{\mathbf{v}} \,|\, \underline{\mathbf{w}} \,\rangle = r \cdot \langle\, \underline{\mathbf{u}} \,|\, \underline{\mathbf{w}} \,\rangle + \langle\, \underline{\mathbf{v}} \,|\, \underline{\mathbf{w}} \,\rangle$ für alle $\underline{\mathbf{u}}, \underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{w}} \in \mathbb{R}^3$ und $r \in \mathbb{R}$,
- *Linearität im 2. Argument:* analog, wegen Symmetrie.

Definition

Dualbasis im $\mathbb{R}^3$

Analog wie auf S.59 lässt sich zu jeder Basis $\underline{\mathbf{b}}_1, \underline{\mathbf{b}}_2, \underline{\mathbf{b}}_3 \in \mathbb{R}^3$ eine eindeutige <u>*duale Basis*</u> $\underline{\mathbf{d}}_1, \underline{\mathbf{d}}_2, \underline{\mathbf{d}}_3 \in \mathbb{R}^3$ definieren mit $\langle\, \underline{\mathbf{b}}_i \,|\, \underline{\mathbf{d}}_j \,\rangle = \delta_{ij}$ ($= 1$ falls $i = j$ und 0 sonst, für $i, j \in \{1, 2, 3\}$). Dann gelten für jeden Vektor $\underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^3$ die Darstellungen

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{v}} &= \langle\, \underline{\mathbf{v}} \,|\, \underline{\mathbf{d}}_1 \,\rangle \cdot \underline{\mathbf{b}}_1 + \langle\, \underline{\mathbf{v}} \,|\, \underline{\mathbf{d}}_2 \,\rangle \cdot \underline{\mathbf{b}}_2 + \langle\, \underline{\mathbf{v}} \,|\, \underline{\mathbf{d}}_3 \,\rangle \cdot \underline{\mathbf{b}}_3 \,, \\ &= \langle\, \underline{\mathbf{v}} \,|\, \underline{\mathbf{b}}_1 \,\rangle \cdot \underline{\mathbf{d}}_1 + \langle\, \underline{\mathbf{v}} \,|\, \underline{\mathbf{b}}_2 \,\rangle \cdot \underline{\mathbf{d}}_2 + \langle\, \underline{\mathbf{v}} \,|\, \underline{\mathbf{b}}_3 \,\rangle \cdot \underline{\mathbf{d}}_3 \,. \end{aligned}$$

Aufgabe

Zeige, die Basen $\underline{\mathbf{b}}_1, \underline{\mathbf{b}}_2, \underline{\mathbf{b}}_3$ und $\underline{\mathbf{d}}_1, \underline{\mathbf{d}}_2, \underline{\mathbf{d}}_3$ sind dual zueinander und überprüfe obige Gleichungen für einen beliebigen Vektor $\underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^3$:

$$\underline{\mathbf{b}}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{\mathbf{b}}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \ \underline{\mathbf{b}}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}, \ \underline{\mathbf{d}}_1 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \ \underline{\mathbf{d}}_2 = \begin{pmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ -0.4 \end{pmatrix}, \ \underline{\mathbf{d}}_3 = \begin{pmatrix} 0.1 \\ -0.4 \\ 0.3 \end{pmatrix}.$$

Definition

Orthonormalbasis

Eine Basis $\underline{\mathbf{b}}_1, \underline{\mathbf{b}}_2, \underline{\mathbf{b}}_3$ des $\mathbb{R}^3$ heisst <u>*orthonormal*</u> oder *cartesisch*, wenn ihre Vektoren *orthogonal* d.h. senkrecht zueinander stehen und *normiert* sind, d.h. alle Länge 1 haben, also falls gilt $\langle\, \underline{\mathbf{b}}_i \,|\, \underline{\mathbf{b}}_j \,\rangle = \delta_{ij}$ für $i, j \in \{1, 2, 3\}$. Eine Orthonormalbasis ist *selbstdual*, d.h. ihre eigene Dualbasis. Siehe auch S.58.

Aufgabe

Schreibe den Vektor $\underline{\mathbf{v}}$ als Linearkombination der Orthonormalbasis $\underline{\mathbf{b}}_1, \underline{\mathbf{b}}_2, \underline{\mathbf{b}}_3$,

$$\underline{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \underline{\mathbf{b}}_1 = \begin{pmatrix} 2/11 \\ 6/11 \\ -9/11 \end{pmatrix}, \ \underline{\mathbf{b}}_2 = \begin{pmatrix} -9/11 \\ 6/11 \\ 2/11 \end{pmatrix}, \ \underline{\mathbf{b}}_3 = \begin{pmatrix} 6/11 \\ 7/11 \\ 6/11 \end{pmatrix}.$$

Anwendungen des Skalarproduktes

Wir bemerken, dass es im Raum Anwendungen des Skalarproduktes gibt, die ganz analog zu den Anwendungen in Unterabschnitt 3.1.4 sind.

– *Normalenvektoren von Ebenen:* Ist eine Ebene durch $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$ gegeben, so sind alle Normalenvektoren senkrecht zu dieser Ebene Vielfache von Normale zu Ebene

$$\underline{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} .$$

– *Senkrechte Projektion eines Vektors:* Sind zwei Vektoren $\underline{\mathbf{a}}, \underline{\mathbf{b}} \neq \underline{\mathbf{0}}$ gegeben, so gibt es eine eindeutige Zerlegung des Vektors $\underline{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{a}}_{||\underline{\mathbf{b}}} + \underline{\mathbf{a}}_{\perp\underline{\mathbf{b}}}$ in eine Komponente $\underline{\mathbf{a}}_{||\underline{\mathbf{b}}}$ parallel zu $\underline{\mathbf{b}}$ und eine Komponente $\underline{\mathbf{a}}_{\perp\underline{\mathbf{b}}}$ senkrecht zu $\underline{\mathbf{b}}$. Die Formeln sind die gleichen wie auf S.55. senkrechte Projektion

– *Abstand eines Punktes von einer Ebene:* Setzt man die Koordinaten $(x|y|z)$ eines beliebigen Punktes in die *Hesse'sche Normalform* einer Ebenengleichung $a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z = d$ ein, Abstand eines Punktes von einer Ebene

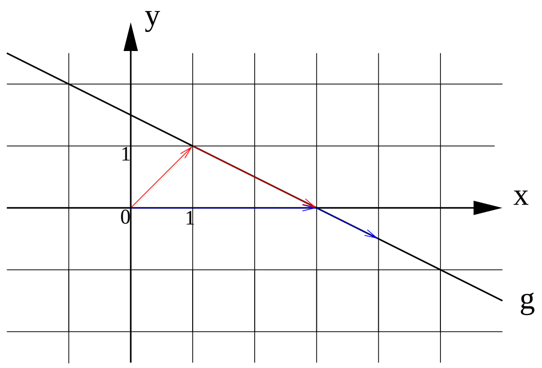
$$\frac{a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z - d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \Delta ,$$

so erhält man den (vorzeichenbehafteten) Abstand Δ dieses Punktes von der Ebene. Das Vorzeichen ist positiv, wenn der Punkt in demjenigen Halbraum liegt, in den der Normalenvektor $\underline{\mathbf{n}}$ der Ebene (s.o.) zeigt.

Diese Tatsachen werden ganz analog gezeigt wie diejenigen im Unterabschnitt 3.1.4.

3.2.2 Parameterdarstellungen von Geraden und Ebenen

Wir kommen nochmals zurück auf die Parameterdarstellung der Geraden g auf S.2,



einerseits als

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \text{andererseits als} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1/2 \end{pmatrix} .$$

Diese zwei Parameterdarstellungen der Geraden g entsprechen den Darstellungen der Lösungsmenge $\mathbb{L} = \widetilde{\mathbb{L}}$ der Geradengleichung von $g\colon x + 2y = 3$ auf S.2,

$$\mathbb{L} = \{(x|y) = (1 + 2t \,|\, 1 - t) \,|\, t \in \mathbb{R}\} \text{ und } \widetilde{\mathbb{L}} = \{(x|y) = (3 + s \,|\, -s/2) \,|\, s \in \mathbb{R}\} = \mathbb{L} .$$

Wie lässt sich nun am besten sehen, dass diese zwei Parameterdarstellungen die gleiche Gerade parametrisieren? Wir schreiben dazu z.B. die erste Darstellung zeilenweise hin,

$$\begin{aligned} x &= 1 + t \cdot 2 \,, \\ y &= 1 + t \cdot (-1) \,. \end{aligned}$$

Nun lösen wir z.B. die zweite Gleichung nach dem Parameter t auf, $t = 1 - y$, und setzen dies in die erste Gleichung ein,

$$x = 1 + (1 - y) \cdot 2 = 3 - 2 \cdot y \,.$$

Nach etwas Umstellen erhalten wir die ursprüngliche Gleichung für $g\colon x + 2 \cdot y = 3$.

Aufgabe

Zeige, dass die zweite Parameterdarstellung auch auf diese Gleichung führt (oder ein Vielfaches davon).

Man kommt also von einer Parameterdarstellung einer Geraden in der Ebene zu einer Geradengleichung durch sog. *Parameterelimination*. Die Parameterdarstellung hat gegenüber der Geradengleichung den Nachteil, dass sie nicht eindeutig ist. Die Geradengleichung ist immerhin bis auf ein Vielfaches eindeutig bestimmt und wird sogar eindeutig, wenn man sie z.B. in die Hessesche Normalform bringt, vgl. S.57. Parameterelimination

Wir bemerken jedoch, dass Parameterelimination bei einer Geraden im *Raum* nicht viel bringt. Schreiben wir z.B. die Schnittgerade der zwei Ebenen im Beispiel auf S.17 (vgl. auch Skizze auf S.18) zeilenweise hin,

$$\begin{aligned} x &= 2 \,, \\ y &= 4 + t/5 \,, \\ z &= t \,, \end{aligned} \qquad \text{oder } g\colon \underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{a}} + t \cdot \underline{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1/5 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Ersetzen wir nun den Parameter t in der zweiten Gleichung mittels $z = t$ (dritte Gleichung) durch z, so haben wir weiterhin noch zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= 2 \,, \\ y &= 4 + z/5 \ \text{ oder } 5y - z = 20 \,. \end{aligned}$$

Die gegebene Gerade ist also die Schnittgerade der Ebenen $x = 2$ und $5y - z = 20$. Im Beispiel auf S.17 haben wir aber die gleiche Gerade als Schnittgerade zweier völlig anderer Ebenen erhalten. Wir gewinnen also nichts an Eindeutigkeit.

Aufgabe

Gib hinreichende Bedingungen an die Aufvektoren $\underline{\mathbf{a}}$, $\underline{\widetilde{\mathbf{a}}} \in \mathbb{R}^3$ und an die Richtungsvektoren $\underline{\mathbf{r}}$, $\underline{\widetilde{\mathbf{r}}} \in \mathbb{R}^3$ dafür, dass folgende Geraden g und h im Raum gleich sind,

$$g\colon \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{a}} + t \cdot \underline{\mathbf{r}} \quad \text{und} \quad h\colon \underline{\mathbf{x}} = \underline{\widetilde{\mathbf{a}}} + s \cdot \underline{\widetilde{\mathbf{r}}} \,.$$

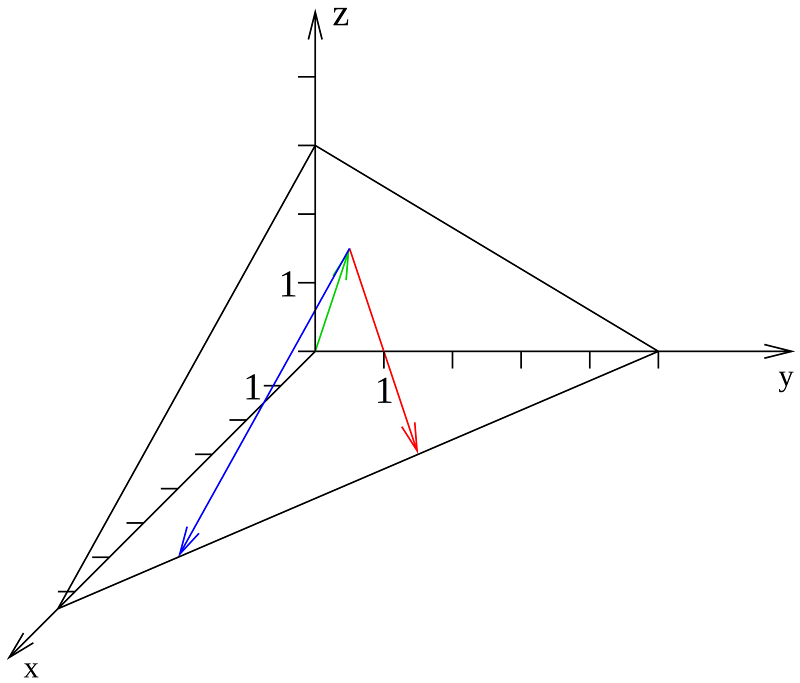
Wir betrachten nun noch Parameterelimination bei der Parameterdarstellung einer Ebene im Raum und zwar an einem

Beispiel

Parameterdarstellung einer Ebene

Gegeben eine Ebene E im Raum mittels Parameterdarstellung ($\underline{\mathbf{a}}$ *Aufvektor*, $\underline{\mathbf{r}}_1$, $\underline{\mathbf{r}}_2$ *zwei Richtungsvektoren*)

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{a}} + t \cdot \underline{\mathbf{r}}_1 + s \cdot \underline{\mathbf{r}}_2 \ .$$



Wir schreiben die Gleichungen zeilenweise hin,

$$\begin{aligned} x &= 1 + t \cdot 2 + s \cdot 5 \ , \\ y &= 1 + t \cdot 2 + s \cdot 0 \ , \\ z &= 2 + t \cdot (-2) + s \cdot (-2) \ . \end{aligned}$$

Addiert man zur ersten zweimal die dritte Gleichung, so erhält man

$$x + 2 \cdot z = 5 - 2 \cdot t + s \quad \text{oder } s = 2 \cdot t + x + 2 \cdot z - 5 \ .$$

Dies setzen wir nun in die erste Gleichung ein und ersetzen anschliessend noch $2 \cdot t$ durch $y - 1$ (aus der zweiten Gleichung $y = 1 + 2 \cdot t$). Wir erhalten

$$\begin{aligned} x = 1 + 2 \cdot t + 5 \cdot s &= 1 + (y - 1) + 5 \cdot ((y - 1) + x + 2 \cdot z - 5) \\ &= 6 \cdot y + 5 \cdot x + 10 \cdot z - 30 \ . \end{aligned}$$

Durch Vereinfachung erhalten wir also die Ebenengleichung

$$E \colon 2 \cdot x + 3 \cdot y + 5 \cdot z = 15 \ ,$$

die im Gegensatz zur Parameterdarstellung eindeutig ist (bis auf ein Vielfaches). Zur Kontrolle können die Achsenschnittpunkte (7.5|0|0), (0|5|0) und (0|0|3) berechnet werden. Elimination der Parameter t und s führt also wieder zu einer eindeutig(er)en Beschreibung von E mittels Ebenengleichung.

3.2.3 Das Vektorprodukt

Gemäss der ersten Bemerkung auf S.63 genügt es, zur Bestimmung der linken Seite einer Ebenengleichung einen Normalenvektor zur Ebene zu kennen. Um aus der Parameterdarstellung einer Ebene einen Normalenvektor zu bestimmen, bemerken wir, dass ein Normalenvektor zu einer Ebene senkrecht auf allen Vektoren parallel zur Ebene steht, insbesondere also senkrecht zu den zwei Richtungsvektoren. Seien also

$$\underline{\mathbf{r}}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \ \underline{\mathbf{r}}_2 = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \ \text{und} \ \underline{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

zwei Richtungsvektoren einer Ebene und ein zugehöriger Normalenvektor. Es muss $\underline{\mathbf{r}}_1 \perp \underline{\mathbf{n}}$ und $\underline{\mathbf{r}}_2 \perp \underline{\mathbf{n}}$ erfüllt sein, d.h. ausgeschrieben (mit Hilfe des Skalarproduktes)

$$\begin{aligned} x_1 \cdot x_3 + y_1 \cdot y_3 + z_1 \cdot z_3 &= 0 \text{ und} \\ x_2 \cdot x_3 + y_2 \cdot y_3 + z_2 \cdot z_3 &= 0 \,. \end{aligned}$$

Diese Bedingungen bringen uns zur

Definition Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$

Das *Kreuz*– oder *Vektorprodukte* $\underline{\mathbf{n}}$ zweier Vektoren $\underline{\mathbf{r}}_1$ und $\underline{\mathbf{r}}_2$ im $\mathbb{R}^3$ ist definiert als

$$\underline{\mathbf{n}} = \underline{\mathbf{r}}_1 \times \underline{\mathbf{r}}_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} : = \begin{pmatrix} y_1 \cdot z_2 - z_1 \cdot y_2 \\ z_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot z_2 \\ x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot x_2 \end{pmatrix}$$

Die Tatsache, dass dieser Vektor $\underline{\mathbf{n}}$ *senkrecht* auf $\underline{\mathbf{r}}_1$ und $\underline{\mathbf{r}}_2$ steht, kann mittels Skalarprodukt direkt nachgerechnet werden. Ferner ist $|\underline{\mathbf{n}}|$ gleich der *Fläche* $\mathcal{F}$ des von $\underline{\mathbf{r}}_1$ und $\underline{\mathbf{r}}_2$ aufgespannten Parallelogramms. Gemäss den Rechnungen zum Flächenprodukt auf S.57 muss dazu

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^2 = |\underline{\mathbf{n}}|^2 &= |\underline{\mathbf{r}}_1|^2 \cdot |\underline{\mathbf{r}}_2|^2 \cdot \sin(\varphi)^2 = |\underline{\mathbf{r}}_1|^2 \cdot |\underline{\mathbf{r}}_2|^2 \cdot (1 - \cos(\varphi)^2) \\ &= |\underline{\mathbf{r}}_1|^2 \cdot |\underline{\mathbf{r}}_2|^2 - \langle \underline{\mathbf{r}}_1 \mid \underline{\mathbf{r}}_2 \rangle^2 \end{aligned}$$

nachgerechnet werden, also

$$\begin{aligned} & (y_1 \cdot z_2 - z_1 \cdot y_2)^2 + (z_1 \cdot x_2 - x_1 \cdot z_2)^2 + (x_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot x_2)^2 \\ = \ & (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) - (x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2)^2 \ , \end{aligned}$$

was einfach ist, da sich in der zweiten Zeile nach Ausmultiplizieren der Klammern die Summanden $x_1^2 \cdot x_2^2$, $y_1^2 \cdot y_2^2$ und $z_1^2 \cdot z_2^2$ gerade wegheben. Nun ist es geometrisch klar, dass es zu zwei Vektoren $\underline{\mathbf{r}}_1$ und $\underline{\mathbf{r}}_2$ im $\mathbb{R}^3$ nur zwei Vektoren $\underline{\mathbf{n}}$ und $-\underline{\mathbf{n}}$ geben kann, die senkrecht auf $\underline{\mathbf{r}}_1$ und $\underline{\mathbf{r}}_2$ stehen und eine vorgeschriebene Länge haben. Die obige Formel für das Vektorprodukt liefert $\underline{\mathbf{n}} = \underline{\mathbf{r}}_1 \times \underline{\mathbf{r}}_2$ zusätzlich so, dass

$$\underline{\mathbf{r}}_1 \,, \underline{\mathbf{r}}_2 \,, \ \underline{\mathbf{n}} = \underline{\mathbf{r}}_1 \times \underline{\mathbf{r}}_2$$

in dieser Reihenfolge ein <u>*Rechtssystem*</u> bilden, falls $\mathcal{F} \neq 0$ (ohne Beweis). Damit ist das Vektorprodukt auch geometrisch eindeutig festgelegt.

Anwendung

Wir bestimmen die Gleichung der Ebene E im Beispiel auf S.65 aus den beiden Richtungsvektoren,

$$\underline{\mathbf{n}} = \underline{\mathbf{r}}_1 \times \underline{\mathbf{r}}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-2) - (-2) \cdot 0 \\ (-2) \cdot 5 - 2 \cdot (-2) \\ 2 \cdot 0 - 2 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ -10 \end{pmatrix} .$$

Die Gleichung der Ebene E lautet also

$$-4 \cdot x - 6 \cdot y - 10 \cdot z = d$$

und durch Einsetzen des Punktes $(1|1|2)$ (Aufvektor) berechnet man $d = -30$. Bis auf einen Faktor -2 erhalten wir also die gleiche Gleichung wie im Beispiel oben und zwar auf etwas effizientere Weise.

Aufgabe

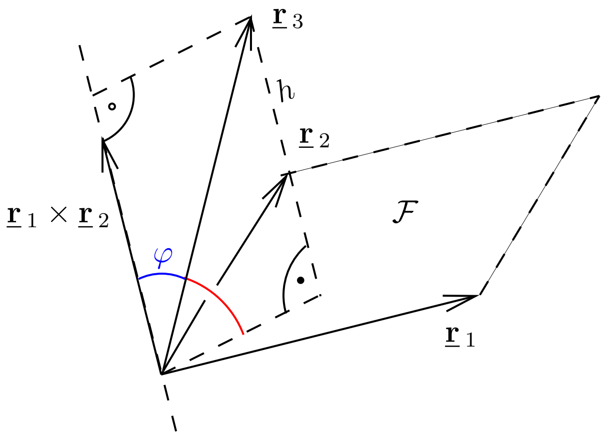
Gib die Gleichung der Ebene durch die drei Punkte $P(1|2|3)$, $Q(5|3|4)$ und $R(-7|6|5)$.

Geometrische Interpretation der Determinante

Man rechnet leicht nach, dass für alle Vektoren $\underline{\mathbf{r}}_1$, $\underline{\mathbf{r}}_2$, $\underline{\mathbf{r}}_3 \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\langle \underline{\mathbf{r}}_1 \times \underline{\mathbf{r}}_2 \,|\, \underline{\mathbf{r}}_3 \rangle = \det(\underline{\mathbf{r}}_1, \underline{\mathbf{r}}_2, \underline{\mathbf{r}}_3) = \langle \underline{\mathbf{r}}_3 \,|\, \underline{\mathbf{r}}_1 \times \underline{\mathbf{r}}_2 \rangle \ .$$

Da wir eine geometrische Interpretation des Vektorproduktes $\underline{\mathbf{r}}_1 \times \underline{\mathbf{r}}_2$ haben, können wir mittels dieser Gleichung nun auch die Determinante geometrisch interpretieren.



$$\det(\underline{\mathbf{r}}_1, \underline{\mathbf{r}}_2, \underline{\mathbf{r}}_3) = \langle \underline{\mathbf{r}}_1 \times \underline{\mathbf{r}}_2 \,|\, \underline{\mathbf{r}}_3 \rangle = |\underline{\mathbf{r}}_1 \times \underline{\mathbf{r}}_2||\underline{\mathbf{r}}_3| \cos(\varphi) = \underbrace{|\underline{\mathbf{r}}_1 \times \underline{\mathbf{r}}_2|}_{=\mathcal{F}} \underbrace{|\underline{\mathbf{r}}_3| \sin(\pi/2 - \varphi)}_{=\pm h} \ .$$

Wir sehen also, dass die Determinante (bis auf ein Vorzeichen) das <u>*Volumen*</u> des von $\underline{\mathbf{r}}_1$, $\underline{\mathbf{r}}_2$ und $\underline{\mathbf{r}}_3$ aufgespannten Spates (*Parallelepipedes*) liefert. Für $\varphi > \pi/2$ wäre ±Spatvolumen

$\underline{\mathbf{r}}_1$, $\underline{\mathbf{r}}_2$, $\underline{\mathbf{r}}_3$ (in dieser Reihenfolge) kein Rechtssystem mehr und die Determinante entsprechend negativ.

Rechengesetze für das Vektorprodukt

Wir notieren noch die offensichtlichen Rechengesetze für das Vektorprodukt. Seien $\underline{\mathbf{a}}$, $\underline{\mathbf{b}}$ und $\underline{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^3$.

— Das Vektorprodukt ist *antisymmetrisch*: $\underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{b}} = -\underline{\mathbf{b}} \times \underline{\mathbf{a}}$,

— Das Vektorprodukt ist *linear* (im ersten Argument):

$$(\underline{\mathbf{a}} + r \cdot \underline{\mathbf{b}}) \times \underline{\mathbf{c}} = \underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{c}} + r \cdot (\underline{\mathbf{b}} \times \underline{\mathbf{c}}) \ ,$$

und natürlich ebenso im zweiten Argument (z.B. wegen der Antisymmetrie).

Aufgabe

Wie man an Beispielen leicht einsieht ist das Vektorprodukt *nicht* assoziativ. Da aber der Vektor $(\underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{b}}) \times \underline{\mathbf{c}}$ senkrecht auf $\underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{b}}$ steht, also in der Ebene liegt, die durch $\underline{\mathbf{a}}$ und $\underline{\mathbf{b}}$ aufgespannt wird (wenn $\underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{b}} \neq \underline{\mathbf{0}}$), muss eine Formel der Form

$$(\underline{\mathbf{a}} \times \underline{\mathbf{b}}) \times \underline{\mathbf{c}} = \mu \cdot \underline{\mathbf{a}} + \nu \cdot \underline{\mathbf{b}}$$

gelten, für Koeffizienten $\mu, \nu \in \mathbb{R}$, die von $\underline{\mathbf{a}}$, $\underline{\mathbf{b}}$ und $\underline{\mathbf{c}}$ abhängen. Leite sie her!
Hinweis: Die Formel ist linear in $\underline{\mathbf{a}}$, $\underline{\mathbf{b}}$ und $\underline{\mathbf{c}}$.

Anwendungen des Vektorproduktes

1. Anwendung Gleichung einer Ebene durch drei Punkte

Ebene durch drei Punkte

Es soll die Gleichung der Ebene durch die Punkte $A(1|2|3)$, $B(6|5|-4)$ und $C(7|0|8)$ bestimmt werden.
Offensichtlich könnte man so vorgehen, wie im Beispiel auf S.65 und aus der Parameterdarstellung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{a}} + t \cdot \underline{\mathbf{r}}_1 + s \cdot \underline{\mathbf{r}}_2 = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

die Parameter t und s eliminieren. Effizienter ist es, einen Normalenvektor

$$\underline{\mathbf{n}} = \underline{\mathbf{r}}_1 \times \underline{\mathbf{r}}_2 = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -67 \\ -28 \end{pmatrix}$$

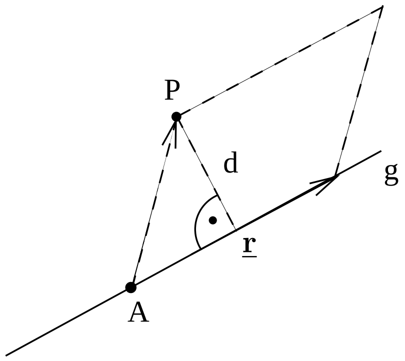
zur Ebene zu bestimmen und diesen für die Koeffizienten der Ebenegleichung herbeizuziehen,

$$E\colon x - 67 \cdot y - 28 \cdot z = 1 - 67 \cdot 2 - 28 \cdot 3 = -217 \ .$$

Die rechte Seite erhält man dann durch Einsetzen eines Punktes, z.B. A.

2. Anwendung Abstand eines Punktes von einer Geraden im Raum

Abstand eines Punktes von einer Geraden im Raum



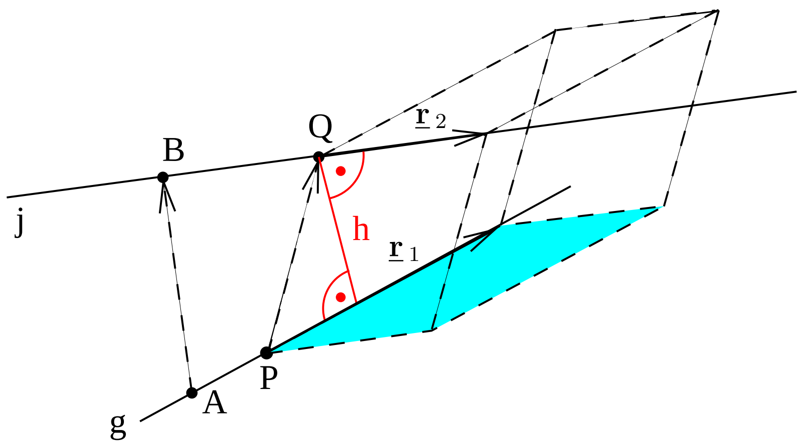
Möchte man den Abstand d eines Punktes P von der Geraden $g\colon \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{a}} + t \cdot \underline{\mathbf{r}}$ bestimmen, so könnte man den Vektor $\overrightarrow{AP}$ mit einem beliebigen Punkt $A \in g$ senkrecht auf den Richtungsvektor $\underline{\mathbf{r}}$ der Geraden projizieren und diese Projektion $\overrightarrow{AP}_{||\underline{\mathbf{r}}}$ von $\overrightarrow{AP}$ subtrahieren. Die Länge von $\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AP}_{||\underline{\mathbf{r}}} = \overrightarrow{AP}_{\perp\underline{\mathbf{r}}}$ ist d, siehe S.55f. Alternativ dazu gilt

$$d = \frac{|\overrightarrow{AP} \times \underline{\mathbf{r}}|}{|\underline{\mathbf{r}}|} \ ,$$

da der Zähler dieses Bruches die Fläche des von $\overrightarrow{AP}$ und $\underline{\mathbf{r}}$ eingeschlossenen Parallelogrammes ist.

3. Anwendung Abstand zweier (nicht paralleler) Geraden im Raum

Abstand zweier Geraden im Raum



Die Geraden $g\colon \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{a}} + t \cdot \underline{\mathbf{r}}_1$ und $j\colon \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}} + s \cdot \underline{\mathbf{r}}_2$ im Raum haben den Abstand

$$h = \frac{|\det(\overrightarrow{PQ}, \underline{\mathbf{r}}_1, \underline{\mathbf{r}}_2)|}{|\underline{\mathbf{r}}_1 \times \underline{\mathbf{r}}_2|} \ ,$$

da der Zähler dieses Bruches das Volumen des von $\overrightarrow{PQ}$ und den Richtungsvektoren $\underline{\mathbf{r}}_1$ und $\underline{\mathbf{r}}_2$ aufgespannten Spates und der Nenner die Fläche des von den Richtungsvektoren aufgespannten Parallelogrammes ist. Dabei ist die Wahl von $P \in g$ und $Q \in j$ völlig beliebig. Wie die Skizze zeigt, hat ein z.B. von $\overrightarrow{AB}$, $\underline{\mathbf{r}}_1$ und $\underline{\mathbf{r}}_2$ aufgespanntes Parallelepiped (Spat) genau dei gleiche Höhe h.

4. Anwendung Bestimmung der Dualbasis einer Basis $\underline{\mathbf{b}}_1$, $\underline{\mathbf{b}}_2$, $\underline{\mathbf{b}}_3$ von $\mathbb{R}^3$. Der Vektor $\underline{\mathbf{d}}_1$ erfüllt $\langle \underline{\mathbf{d}}_1 \mid \underline{\mathbf{b}}_k \rangle = \delta_{1k}$ ($= 1$, falls $k = 1$ und 0, falls $k \neq 1$). Da also $\underline{\mathbf{d}}_1$ senkrecht auf $\underline{\mathbf{b}}_2$ und $\underline{\mathbf{b}}_3$ steht, muss $\underline{\mathbf{d}}_1$ ein Vielfaches $c \cdot \underline{\mathbf{b}}_2 \times \underline{\mathbf{b}}_3$ von $\underline{\mathbf{b}}_2 \times \underline{\mathbf{b}}_3$ sein. Zudem gilt $\langle \underline{\mathbf{b}}_1 \mid \underline{\mathbf{d}}_1 \rangle = \langle \underline{\mathbf{b}}_1 \mid c \cdot \underline{\mathbf{b}}_2 \times \underline{\mathbf{b}}_3 \rangle = c \cdot \det(\underline{\mathbf{b}}_1, \underline{\mathbf{b}}_2, \underline{\mathbf{b}}_3)$, also

Berechnung einer Dualbasis im $\mathbb{R}^3$.

$\underline{\mathbf{d}}_1 = c \cdot \underline{\mathbf{b}}_2 \times \underline{\mathbf{b}}_3$ und ebenso $\underline{\mathbf{d}}_2 = c \cdot \underline{\mathbf{b}}_3 \times \underline{\mathbf{b}}_1, \underline{\mathbf{d}}_3 = c \cdot \underline{\mathbf{b}}_1 \times \underline{\mathbf{b}}_2$ mit $c = \det(\underline{\mathbf{b}}_1, \underline{\mathbf{b}}_2, \underline{\mathbf{b}}_3)^{-1}$.

Zum Beispiel gilt für die Basis auf S.62

$$\det(\underline{\mathbf{b}}_1, \underline{\mathbf{b}}_2, \underline{\mathbf{b}}_3) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} = -10 \text{ und } \underline{\mathbf{d}}_1 = -\frac{1}{10} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1/2 \end{pmatrix} .$$

3.3 Matrizen

3.3.1 Definition und Rechenregeln

Die Matrixschreibweise ist zunächst eine praktische Notation, mit der sich lineare Gleichungssysteme gut darstellen lassen. Zum Beispiel notiert man das 2×3–System im Beispiel auf S.4

$$\mathbf{A} \cdot \underline{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2x - 2y + 3z \\ 4x + 2y - 2z \end{pmatrix}}_{\mathbf{A} \cdot \underline{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{b}}} = \underline{\mathbf{b}} .$$

Man nennt hier $\mathbf{A}$ eine 2×3–Matrix und diese wird mit einem Vektor $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$ (oder einer „3×1–Matrix“) multipliziert. Das Resultat $\mathbf{A} \cdot \underline{\mathbf{x}}$ ist ein Vektor in $\mathbb{R}^2$ (oder eine „2×1–Matrix“). Das 3×3–System auf S.5 wird wie folgt notiert,

$$\mathbf{C} \cdot \underline{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 4 \end{pmatrix}}_{\mathbf{C}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2x - 2y + 3z \\ 4x + 2y - 2z \\ x + 4y + 4z \end{pmatrix}}_{\mathbf{C} \cdot \underline{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}}_{\underline{\mathbf{d}}} = \underline{\mathbf{d}} .$$

Hier ist $\mathbf{C}$ eine 3×3–Matrix und diese wird mit einem Vektor $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^3$ (oder einer „3×1–Matrix“) multipliziert. Das Resultat $\mathbf{C} \cdot \underline{\mathbf{x}}$ ist ein Vektor in $\mathbb{R}^3$ (oder eine „3×1–Matrix“).
Allgemein kann man eine $p \times \underline{q}$–Matrix $\mathbf{M}$ mit einer $\underline{q} \times r$–Matrix $\mathbf{N}$ multiplizieren, wenn also die Matrix links gleichviele Spalten hat, wie die Matrix rechts Zeilen,

Matrixmultiplikation

$$\underbrace{\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1q} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2q} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{p1} & m_{p2} & \dots & m_{pq} \end{pmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} & \dots \\ n_{21} & n_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ n_{q1} & n_{q2} & \dots \end{pmatrix}}_{\mathbf{N}} = \underbrace{\begin{pmatrix} m_{11} \cdot n_{11} + \dots + m_{1q} \cdot n_{q1} & \dots & \dots \\ m_{21} \cdot n_{11} + \dots + m_{2q} \cdot n_{q1} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ m_{p1} \cdot n_{11} + \dots + m_{pq} \cdot n_{q1} & \dots & \dots \end{pmatrix}}_{\mathbf{M} \cdot \mathbf{N}}$$

wobei in der ersten Spalte von $\mathbf{M} \cdot \mathbf{N}$ das Produkt der Matrix $\mathbf{M}$ mit der ersten Spalte von $\mathbf{N}$, in der zweiten Spalte von $\mathbf{M} \cdot \mathbf{N}$ das Produkt der Matrix $\mathbf{M}$ mit der zweiten Spalte von $\mathbf{N}$ steht, usw. usf. Insgesamt ist dann $\mathbf{M} \cdot \mathbf{N}$ eine Matrix mit p Zeilen und r Spalten, also eine $p \times r$–Matrix.

Beispiel
Wir multiplizieren zwei 2×2–Matrizen

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix} &= \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y & a \cdot z + b \cdot w \\ c \cdot x + d \cdot y & c \cdot z + d \cdot w \end{pmatrix} .\end{aligned}$$

Wir untersuchen nun, was passiert, wenn wir beide Seiten eines 2×2–Gleichungssystems (von links) mit einer ganz bestimmten 2×2–Matrix multiplizieren,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \cdot \Bigg| \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot x + b \cdot y \\ c \cdot x + d \cdot y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} d \cdot (a \cdot x + b \cdot y) - b \cdot (c \cdot x + d \cdot y) \\ -c \cdot (a \cdot x + b \cdot y) + a \cdot (c \cdot x + d \cdot y) \end{pmatrix} = \Delta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} d \cdot e - b \cdot f \\ -c \cdot e + a \cdot f \end{pmatrix} ,\end{aligned}$$

mit $\Delta = a \cdot d - b \cdot c$. Bis auf den Vorfaktor Δ ist dadurch also das Gleichungssystem gelöst. Dies führt auf folgende

Definition Inverse Matrix

Für $\Delta = a \cdot d - b \cdot c \neq 0$ heisst

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d/\Delta & -b/\Delta \\ -c/\Delta & a/\Delta \end{pmatrix} \ \underline{\textit{Inverse}} \text{ von } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

und es gilt $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, die sog. 2×2–*Einheitsmatrix* .

Die *Einheitsmatrix* $\mathbb{I}$ heisst so, weil für alle Vektoren $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2$ und alle 2×2–Matrizen $\mathbf{A}$ gilt Einheitsmatrix

$$\mathbb{I}\cdot\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underline{\mathbf{x}} \text{ und } \mathbb{I}\cdot\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \mathbf{A} = \mathbf{A}\cdot\mathbb{I} .$$

Wir betonen, dass Matrixmultiplikation im allgemeinen *nicht kommutativ* ist, dass im allgemeinen also $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ gilt. Ist z.B. $\mathbf{A}$ eine 2×3–Matrix und $\mathbf{B}$ eine 3×4–Matrix, so ist $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ eine 2×4–Matrix, jedoch ist $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ nicht einmal definiert, da $\mathbf{B}$ nicht gleich viele Spalten (4) hat, wie $\mathbf{A}$ Zeilen (2). Matrixmultiplikation nicht kommutativ

Jedoch ist Matrixmultiplikation immer *assoziativ*, denn es gilt $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$, wann immer diese Matrixprodukte definiert sind. assoziativ

Wir schreiben nun ein lineares 2×2–Gleichungssystem als

$$\mathbf{A} \cdot \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}} ,$$

wobei $\mathbf{A}$ eine 2×2–Matix mit $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ und $\underline{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^2$ gegeben seien. Wir lösen dann nach $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^2$ auf, indem wir (von links) mit der Inversen $\mathbf{A}^{-1}$ multiplizieren,

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{A} \cdot \underline{\mathbf{x}}) = (\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}) \cdot \underline{\mathbf{x}} = \mathbb{I} \cdot \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \underline{\mathbf{b}} \ ,$$

wobei wir die *Assoziativität* der Matrixmultiplikation benutzt haben.

Aufgabe

Wir betrachten die zwei 3×3–Matrizen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & j \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{B} = \begin{pmatrix} e \cdot j - f \cdot h & c \cdot h - b \cdot j & b \cdot f - c \cdot e \\ f \cdot g - d \cdot j & a \cdot j - c \cdot g & c \cdot d - a \cdot f \\ d \cdot h - e \cdot g & b \cdot g - a \cdot h & a \cdot e - b \cdot d \end{pmatrix} .$$

Rechne nach, dass gilt $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \Delta \cdot \mathbb{I}$, wobei $\Delta = \det(\mathbf{A})$ und $\mathbb{I}$ die 3×3–Einheitsmatrix. (Also gilt $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \mathbf{B}$, falls $\Delta = \det(\mathbf{A}) \neq 0$.) Inverse einer 3×3–Matrix

Bis hierhin sind also Matrizen einfach Mittel für eine kompakte Schreibweise von Gleichungssystemen. Auch der Gauß–Algorithmus lässt sich mittels Matrixmultiplikation schreiben. Zum Beispiel betrachten wir nochmals das lineare 2×3–System von S.4,

$$\begin{array}{rcl} 2x - 2y + 3z & = & 6 \ , \\ 4x + 2y - 2z & = & 7 \end{array} \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} .$$

Gemäss Gauß–Algorithmus subtrahieren wir nun von der zweiten Zeile zweimal die erste. Wir erhalten

$$\begin{array}{rcl} 2x - 2y + 3z & = & 6 \ , \\ 0x + 6y - 8z & = & -5 \end{array} \quad \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 6 & -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} .$$

Dies entspricht der Matrixmultiplikation beider Seiten des Gleichungssystems mit einer bestimmten 2×2–Matrix, nämlich

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 6 & -8 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix} .$$

Es stellt sich heraus, dass Matrixoperationen sowohl für das Lösen von linearen Gleichungssystemen (oder allgemeiner für lineare Algebra) als auch für die Beschreibung von z.B. Kongruenzgeometrie oder Ähnlichkeitsgeometrie im Koordinatensystem das geeignete Hilfsmittel sind. Wir beschreiben die wichtigsten Operationen im Detail.

Definition Matrixaddition

Seien $\mathbf{M}$ und $\mathbf{N}$ zwei $p \times q$–Matrizen, also beide mit p Zeilen und q Spalten. Seien m_{ik} bzw. n_{ik} die Einträge der Matrix $\mathbf{M}$ bzw. $\mathbf{N}$ in der i–ten Zeile und k–ten Spalte. Die *Summe* $\mathbf{S} = \mathbf{M} + \mathbf{N}$ der Matrizen $\mathbf{M}$ und $\mathbf{N}$ ist dann wieder eine $p \times q$–Matrix mit Eintrag $s_{ik} = m_{ik} + n_{ik}$ in der i–ten Zeile und k–ten Spalte. ($i = 1, \ldots, p$, $k = 1, \ldots, q$)

Bemerkungen zu dieser Definition
Die Addition von Vektoren im $\mathbb{R}^2$ („2×1–Matrizen“) und $\mathbb{R}^3$ („3×1–Matrizen“) ist ein Spezialfall der Matrixaddition. Diese ist *kommutativ* und *assoziativ* und die Menge aller $p \times q$–Matrizen bilden einen *Vektorraum* über den reellen Zahlen, man schreibt $\mathbb{R}^{p\times q}$. Die Multiplikation einer Matrix mit einer reellen Zahl r erfolgt, indem man jeden Eintrag mit r multipliziert. Die *Nullmatrix* (mit allen Einträgen gleich 0) ist das additive Neutralelement dieses Vektorraums, seine Dimension ist $p \cdot q$.

Vektorraum der $p \times q$–Matrizen

Nullmatrix

Definition

Matrixmultiplikation

Ist $\mathbf{M}$ eine $p\times q$– und $\mathbf{N}$ eine $q\times r$–Matrix, so ist ihr *Produkt* $\mathbf{P} = \mathbf{M}\cdot\mathbf{N}$ eine $p\times r$–Matrix. Ihr Eintrag p_{ik} in der i–ten Zeile ($i = 1, 2, \ldots, p$) und k–ten Spalte ($k = 1, 2, \ldots, r$) ist das Skalarprodukt der i–ten Zeile von $\mathbf{M}$ mit der k–ten Spalte von $\mathbf{N}$,

$$p_{ik} = m_{i1} \cdot n_{1k} + m_{i2} \cdot n_{2k} + \cdots + m_{iq} \cdot n_{qk} \ .$$

Dabei sind $m_{i1}, m_{i2}, \ldots, m_{iq}$ die Einträge der i–ten Zeile von $\mathbf{M}$ und $n_{1k}, n_{2k}, \ldots, n_{qk}$ die Einträge der k–ten Spalte von $\mathbf{N}$.

Bemerkungen zu dieser Definition
Wie bereits erwähnt ist die Matrixmultiplikation *nicht* kommutativ, ja es kann sein, dass das Produkt $\mathbf{M}\cdot\mathbf{N}$ definiert ist (wenn $\mathbf{M}$ gleichviele Spalten wie $\mathbf{N}$ Zeilen hat), jedoch das Produkt $\mathbf{N} \cdot \mathbf{M}$ *nicht* definiert ist (weil die Anzahl Spalten von $\mathbf{N}$ nicht gleich der Anzahl Zeilen von $\mathbf{M}$ ist).
Jedoch ist die Matrixmultiplikation immer *assoziativ* . Sind z.B. die Produkte $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ und $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ definiert, so gilt immer

Matrixmultiplikation nicht kommutativ

Matrixmultiplikation assoziativ

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \ .$$

Man verzichtet deshalb auf das Setzen von Klammern. Sind ferner $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ beides $p \times q$–Matrizen, so haben wir *Distributivität*,

Distributivität

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) + (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$$

und wir können auch rechts die Klammern weglassen, da *„Punkt vor Strich“* geht.
Schränkt man sich nun ein auf $n \times n$–Matrizen, also auf $\mathbb{R}^{n\times n}$, so kann man in diesem Vektorraum der Dimension n^2 zwei beliebige Elemente $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ addieren, $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, und auch multiplizieren, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ und $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$, was im allgemeinen nicht das gleiche ist. Zudem kann man jede Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit einer reellen Zahl $r \in \mathbb{R}$ multiplizieren, $r \cdot \mathbf{A}$, indem man jeden Eintrag von $\mathbf{A}$ mit r multipliziert. Neben der Vektorraum–Struktur hat $\mathbb{R}^{n\times n}$ also noch eine zusätzliche multiplikative Struktur und ein multiplikatives *Neutralelement* $\mathbb{I}$, die $n\times n$–Einheitsmatrix, die $n\times n$–Matrix mit lauter Einträgen 0 ausser in der Diagonalen, wo die Einträge 1 sind. Man rechnet nach, dass für alle $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt

multiplikatives Neutralelement

$n \times n$–Einheitsmatrix

$$\mathbf{A} \cdot \mathbb{I} = \mathbf{A} = \mathbb{I} \cdot \mathbf{A} \ .$$

Jede $n \times n$–Matrix $\mathbf{A}$ hat eine *Determinante* $\det(\mathbf{A}) \in \mathbb{R}$ (die wir nur für $n = 2$ und

Determinante

$n = 3$ definiert haben). Genau dann wenn $\det(\mathbf{A}) \neq 0$ gilt, gibt es eine sog. *Inverse* $\mathbf{A}^{-1}$ von $\mathbf{A}$ in $\mathbb{R}^{n\times n}$ mit

Inverse $n \times n$–Matrix

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbb{I} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} \text{ und } \det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} .$$

Für alle $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt übrigens $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})$ und für $\mathbb{I}$, die $n \times n$–Einehitsmatrix, gilt $\det(\mathbb{I}) = 1$ und $\mathbb{I}^{-1} = \mathbb{I}$.

Determinante multiplikativ

Wir betrachten nun Matrizen noch eingehender im Zusammenhang mit Gleichungssystemen (nächster Unterabschnitt) und im Zusammenhang mit Kongruenzgeometrie (übernächster Unterabschnitt).

3.3.2 Rang und Kern einer Matrix

Sei $\mathbf{A}$ eine $m \times n$–Matrix und $\underline{\mathbf{b}}$ ein Vektor in $\mathbb{R}^m$ („$m \times 1$–Matrix“). Die Menge

$$\mathbb{L} = \{\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \,|\, \mathbf{A} \cdot \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}\,\}$$

heisst *Lösungsmenge* des linearen $m \times n$–Gleichungssystems. Nach vollständiger Durchführung des Gauß–Algorithmus hat die *erweiterte Koeffizientenmatrix* $(\mathbf{A}|\underline{\mathbf{b}})$ Stufenform. Gibt es nach Erreichen dieser Stufenform links eine Nullzeile, wo rechts in der Spalte $\underline{\mathbf{b}}$ ein Eintrag ungleich 0 ist, so ist $\mathbb{L}$ leer (keine Lösungen $\underline{\mathbf{x}}$). Steht nach vollständiger Durchführung des GA in jeder Nullzeile links rechts in der Spalte von $\underline{\mathbf{b}}$ auch eine 0 so ist $\mathbb{L}$ nicht leer. In diesem Fall hat das Gleichungssystem Lösung(en), siehe auch S.12.

erweiterte Koeffizientenmatrix

Die Anzahl Stufen (ohne Nullzeilen) der *erweiterten* Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A}|\underline{\mathbf{b}})$ ist nach vollständiger Durchführung des GA im Falle $\mathbb{L} \neq \{\}$ (Lösung(en)) also *gleich* der Anzahl Stufen der Koeffizientenmatrix links

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & * & * & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) .$$

Man nennt diese Anzahl Stufen den *Rang* der erweiterten Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A}|\underline{\mathbf{b}})$ bzw. den Rang der *Koeffizientenmatrix* $\mathbf{A}$. Im Falle $\mathbb{L} = \{\}$ ist der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A}|\underline{\mathbf{b}})$ (um eins) grösser als der Rang der Koeffizientenmatrix $\mathbf{A}$,

Rang einer Matrix

Koeffizientenmatrix

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} * & * & * & * & * & * \\ 0 & * & * & * & * & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & * & * & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) .$$

Satz

Lösbarkeit eines linearen Gl.systems

Genau dann hat das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A} \cdot \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$ Lösungen $\underline{\mathbf{x}}$, wenn

$$\mathrm{rk}(\mathbf{A}|\underline{\mathbf{b}}) = \mathrm{rk}(\mathbf{A}).$$

Dabei ist $\mathrm{rk}(\mathbf{A})$ bzw. $\mathrm{rk}(\mathbf{A}|\underline{\mathbf{b}})$ der *Rang der Koeffizientenmatrix* bzw. der *Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix. (engl. rank)*

Definition

Kern

Sei $\mathbf{A}$ eine $m \times n$–Matrix. Die Menge

$$\ker(\mathbf{A}) = \{\underline{\mathbf{k}} \in \mathbb{R}^n \,|\, \mathbf{A} \cdot \underline{\mathbf{k}} = \underline{\mathbf{0}}\}$$

heisst *Kern* der $m \times n$–Matrix $\mathbf{A}$.

Bemerkungen zu dieser Definition
Der Kern $\ker(\mathbf{A})$ einer $m \times n$–Matrix ist ein Vektorraum, ein sog. *Unterraum* des Vektorraums $\mathbb{R}^n$: Sind $\underline{\mathbf{k}}_1, \underline{\mathbf{k}}_2 \in \ker(\mathbf{A})$, so ist auch $\underline{\mathbf{k}} = \underline{\mathbf{k}}_1 + \underline{\mathbf{k}}_2$ im Kern, denn

$$\mathbf{A} \cdot \underline{\mathbf{k}} = \mathbf{A} \cdot (\underline{\mathbf{k}}_1 + \underline{\mathbf{k}}_2) = \mathbf{A} \cdot \underline{\mathbf{k}}_1 + \mathbf{A} \cdot \underline{\mathbf{k}}_2 = \underline{\mathbf{0}} + \underline{\mathbf{0}} = \underline{\mathbf{0}} \ .$$

Ebenso ist mit $\underline{\mathbf{k}} \in \ker(\mathbf{A})$ und $r \in \mathbb{R}$ auch $r \cdot \underline{\mathbf{k}}$ im Kern. Als Vektorraum hat $\ker(\mathbf{A})$ eine Dimension $k \in \mathbb{N}$. Diese ist gleich der maximalen Anzahl linear unabhängiger Vektoren im Kern von $\mathbf{A}$. Es besteht ein enger Zusammenhang zwischen k, der Dimension des Kerns der $m \times n$–Matrix $\mathbf{A}$ und ihrem Rang r wie folgt.

Dimensionssatz

Dimensionssatz

Sei $\mathbf{A}$ eine $m \times n$–Matrix. Sei $r = \mathrm{rk}(\mathbf{A})$ ihr Rang und k die Dimension ihres Kernes $\ker(\mathbf{A})$. Dann gilt

$$r + k = n \ .$$

Diesen Satz haben wir eigentlich schon in Punkt 4b) auf S.12 formuliert.

Bemerkungen zum Dimensionssatz
Sei $\underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung des linearen $m \times n$–Gleichungssystems $\mathbf{A} \cdot \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$ mit Koeffizientenmatrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\underline{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^m$. Für jeden Vektor $\underline{\mathbf{k}} \in \ker(\mathbf{A}) \subset \mathbb{R}^n$ im Kern von $\mathbf{A}$ ist dann auch $\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{k}}$ eine Lösung, denn

$$\mathbf{A} \cdot (\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{k}}) = \mathbf{A} \cdot \underline{\mathbf{x}} + \mathbf{A} \cdot \underline{\mathbf{k}} = \underline{\mathbf{b}} + \underline{\mathbf{0}} = \underline{\mathbf{b}} \ .$$

Ist also $r = \mathrm{rk}(\mathbf{A})$ der Rang von $\mathbf{A}$ und $k = n - r$ die Dimension des Unterraumes $\ker(\mathbf{A})$ von $\mathbb{R}^n$, so gibt es k linear unabhängige Vektoren $\{\underline{\mathbf{k}}_1, \underline{\mathbf{k}}_2, \ldots, \underline{\mathbf{k}}_k\}$, die eine Basis von $\ker(\mathbf{A})$ bilden. Die Lösungsmenge des linearen $m \times n$–Gleichungssystems $\mathbf{A} \cdot \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$ kann dann also dargestellt werden als

Darstellung der Lösungsmenge

$$\mathbb{L} = \{\, \underline{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \,|\, \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{x}}_P + r_1 \cdot \underline{\mathbf{k}}_1 + r_2 \cdot \underline{\mathbf{k}}_2 + \cdots + r_k \cdot \underline{\mathbf{k}}_k \ ; \ r_1, r_2, \ldots, r_k \in \mathbb{R} \,\} \ .$$

Dabei ist $\underline{\mathbf{x}}_P$ *irgendeine* Lösung von $\mathbf{A} \cdot \underline{\mathbf{x}} = \underline{\mathbf{b}}$ (falls es überhaupt eine gibt), man nennt sie auch eine *partikuläre Lösung*. Es gibt Lösungen genau dann wenn $\mathrm{rk}(\mathbf{A}|\underline{\mathbf{b}}) = \mathrm{rk}(\mathbf{A})$ nach obigem Satz. Man beachte aber, dass die Anzahl k der freien Parameter dann nur noch von $\mathbf{A}$ und nicht mehr von $\underline{\mathbf{b}}$ abhängt. partikuläre Lösung

3.3.3 Matrixdarstellung von Kongruenzabbildungen

Definition lineare Abbildung

Seien V und W zwei Vektorräume über $\mathbb{R}$ (z.B. $V = \mathbb{R}^n$ und $W = \mathbb{R}^m$). Eine Abbildung $\varphi\colon V \longrightarrow W$ heisst *linear*, falls für alle $\underline{\mathbf{v}}, \underline{\mathbf{v}}_1, \underline{\mathbf{v}}_2 \in \mathbb{R}$ und für alle $r \in \mathbb{R}$ gilt

$$\varphi(\underline{\mathbf{v}}_1 + \underline{\mathbf{v}}_2) = \varphi(\underline{\mathbf{v}}_1) + \varphi(\underline{\mathbf{v}}_2) \text{ und } \varphi(r \cdot \underline{\mathbf{v}}) = r \cdot \varphi(\underline{\mathbf{v}}) \ .$$

Beispiele

1) $\mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto x \in \mathbb{R}$ (senkrechte Projektion auf x–Achse)

2) $\mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0.6 & -0.8 \\ 0.8 & 0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ (Drehung um $(0|0)$ um Winkel $\arctan(\frac{4}{3})$)

3) $\mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 \\ 0.8 & -0.6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ (Geradenspiegelung an $g\colon x - 2y = 0$)

4) $\mathbb{R}^3 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right\rangle = a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z \in \mathbb{R}$ (Skalarpr. mit $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$)

5) $\mathbb{R}^3 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \cdot z - c \cdot y \\ c \cdot x - a \cdot z \\ a \cdot y - b \cdot x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ (Vektorpr. mit $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$)

6) $\mathbb{R}^3 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8x - 2y - 2z \\ -2x + 5y - 4z \\ -2x - 4y + 5z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

Das letzte Beispiel ist ist die senkrechte Projektion auf die Ebene $E\colon x + 2y + 2z = 0$. Würde man in E eine eigenständige (z.B. cartesische) Basis $\underline{\mathbf{b}}_1, \underline{\mathbf{b}}_2$ wählen, so könnte man diese Abbildung auch auffassen als $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \cong E$. Wir wählen

$$\underline{\mathbf{b}}_1 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{\mathbf{b}}_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \varphi\colon \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \frac{2x - 2y + z}{3} \cdot \underline{\mathbf{b}}_1 + \frac{2x + y - 2z}{3} \cdot \underline{\mathbf{b}}_2 \ .$$

Satz Matrixdarstellung linearer Abbildungen

Seien V und W zwei Vektorräume der Dimension n bzw. m über $\mathbb{R}$ (z.B. $V = \mathbb{R}^n$ und $W = \mathbb{R}^m$). Nach Wahl von Basen $\underline{\mathbf{c}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{c}}_n$ von V und $\underline{\mathbf{b}}_1, \ldots, \underline{\mathbf{b}}_m$ von W kann jede lineare Abbildung durch eine $m \times n$–Matrix dargestellt werden.

Bemerkungen zu diesem Satz

Wir wollen diesen Satz nicht beweisen. Er besagt, dass die $m \times n$–Matrizen mit den linearen Abbildungen von V (der Dimension n) nach W (der Dimension m) identifiziert werden können nach Wahl von Basen in V und W. Das letzte Beispiel oben (senkrechte Projektion von $\mathbb{R}^3$ auf die Ebene $E\colon x+2y+2z=0$) kann z.B. als lineare Abbildung mit $V=\mathbb{R}^3=W$ angesehen werden. Wir wählen also in diesem Fall für $V=W$ die Standardbasis $\underline{\mathbf{e}}_1, \underline{\mathbf{e}}_2, \underline{\mathbf{e}}_3$, und die Abbildung wird dann durch die obige 3×3–Matrix beschrieben. Wenn wir jedoch die Ebene E als „eigenständigen" Vektorraum W der Dimesion 2 ansehen, mit (cartesischer) Basis $\underline{\mathbf{b}}_1, \underline{\mathbf{b}}_2$, wie oben notiert, so ist die zugehörige Matrix

$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} .$$

Wir bemerken noch, dass der Kern dieser Matrix aus den Vektoren senkrecht zu E besteht, weil diese durch die senkrechte Projektion auf E nach $\underline{\mathbf{0}}$ abgebildet werden. Allgemein ist nicht nur der Kern einer linearen Abbildung (entspricht dem Kern der entsprechenden $m\times n$–Matrix) ein Unterraum von V sondern auch das *Bild* der linearen Abbildung $\varphi\colon V \longrightarrow W$ ist ein Vektorraum als Unterraum von W, man schreibt

Bild einer linearer Abbildungen

$$\mathrm{im}(\varphi) = \{\underline{\mathbf{w}} \in W \mid \exists \underline{\mathbf{v}} \in V(\underline{\mathbf{w}} = \varphi(\underline{\mathbf{v}}))\} .$$

Ist φ (nach Wahl von Basen in V und W) durch eine $m\times n$–Matrix $\mathbf{A}$ dargestellt, so schreibt man auch $\underline{\mathrm{im}(\mathbf{A})}$ für diesen Unterraum von W. Die Dimension dieses Unterraumes ist das, was wir auf S.74 als den Rang $\mathrm{rk}(\mathbf{A})$ von $\mathbf{A}$ definiert haben. Der Dimensionssatz auf S.75 lautet dann für eine $m\times n$–Matrix $\mathbf{A}$

Bild einer $m \times n$–Matrix

Dimensionssatz für $m \times n$–Matrix

$$\dim(\ker(\mathbf{A})) + \dim(\mathrm{im}(\mathbf{A})) = \dim(\ker(\mathbf{A})) + \mathrm{rk}(\mathbf{A}) = n .$$

Wir wollen uns nun nicht länger mit allgemeinen linearen Abbildungen aufhalten, obwohl es wichtig ist, dass jedes lineare $m\times n$–Gleichungssystem auch unter diesem Aspekt gesehen werden kann. Denn die Lösungsmenge eines linearen $m\times n$–Gleichungssystems benutzt implizit auch die Begriffe Kern und Bild, die von der Auffassung einer linearen Abbildung her stammen.

Wir wollen jetzt die Kongruenzabbildungen der Ebene in Matrixform beschreiben.

Satz

Matrixdarstellung der ebenen Kongruenzen

Jede Kongruenztransformation Φ der Ebene auf sich hat (nach Wahl eines cartesischen Koordinatensystems) die Form

$$\mathbb{R}^2 \ni \underline{\mathbf{x}} \mapsto \mathbf{A}\cdot\underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } \mathbf{A} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} & (\Phi \text{ gleichsinnig}) \\ \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} & (\Phi \text{ gegensinnig}) \end{cases}$$

und $\varphi \in [0, 2\pi]$ und $\underline{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^2$ (beliebig).

Beispiele
Wir betrachten die Geradenspiegelung an der Geraden $g\colon x+2y=5$. Sie bildet $(0|0)$ auf $(2|4)$ ab (wie man an einer Skizze sieht). Dadurch ist $\underline{\mathbf{b}}$ bereits festgelegt. Der Punkt $(5|0)$ liegt auf g und wird deshalb auf sich abgebildet. Daraus folgt bereits $\cos\varphi = 3/5$. Insgesamt erhalten wir die Abbildung

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ -4/5 & -3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{b}}\ .$$

Der Winkel φ aus obigem Satz erfüllt offenbar $\dfrac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \tan\varphi = \dfrac{-4/5}{3/5} = -4/3$, also $\varphi \approx -53.1°$. Man beachte, dass dieser Winkel genau doppelt so gross ist wie $\varphi/2 = \arctan(-1/2) \approx -26.6°$, der Winkel, den g mit der x–Achse einschliesst. Weiter kann man nachrechnen, dass alle Punkte $(5-2y|y) \in g$ auf sich abgebildet werden (g ist eine Fix*punkt*gerade). Schliesslich ist die Verknüpfung dieser Abbildung mit sich selbst die Identität (nachrechnen!),

$$\underline{\mathbf{x}} \longmapsto \mathbf{A} \cdot \underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{b}} \longmapsto \mathbf{A} \cdot (\mathbf{A} \cdot \underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{b}}) + \underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{x}}\ .$$

Als zweites Beispiel betrachten wir die Abbildung

$$\underline{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{b}}\ .$$

Gemäss Satz ist dies eine gleichsinnige Abbildung. Für eine Verschiebung müsste $\varphi = 0$ sein (und also $\mathbf{A} = \mathbb{I}$). Also handelt es sich um eine Drehung. Das Drehzentrum $(x_0|y_0)$ ist ein Fixpunkt, den wir mittels Gleichungssystem bestimmen,

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 \\ 4/5 & 3/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} 3x_0 - 4y_0 + 5 & = & 5x_0 \\ 4x_0 + 3y_0 + 10 & = & 5y_0 \end{array}\ .$$

Die eindeutige Lösung und somit das Drehzentrum ist $(x_0|y_0) = (-\frac{3}{2}|2)$. Man kann sich auch davon überzeugen, dass $\varphi = \arctan\left(\frac{4/5}{3/5}\right) \approx 53.1°$ gerade der Drehwinkel ist.

Beweis des Satzes auf S.77
Wir weisen zunächst nach, dass die Abbildungen $\underline{\mathbf{x}} \mapsto \mathbf{A} \cdot \underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{b}}$ mit beliebigem $\underline{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^2$ und einem $\underline{\mathbf{A}}$ wie im Satz gegeben die Abstände erhalten. Wir haben

$$|(\mathbf{A} \cdot \underline{\mathbf{x}}_1 + \underline{\mathbf{b}}) - (\mathbf{A} \cdot \underline{\mathbf{x}}_2 + \underline{\mathbf{b}})| = |\mathbf{A} \cdot \underline{\mathbf{x}}_1 - \mathbf{A} \cdot \underline{\mathbf{x}}_2| = |\mathbf{A} \cdot (\underline{\mathbf{x}}_1 - \underline{\mathbf{x}}_2)| \stackrel{!}{=} |\underline{\mathbf{x}}_1 - \underline{\mathbf{x}}_2|$$

für zwei beliebige (Orts–)vektoren $\underline{\mathbf{x}}_1$ und $\underline{\mathbf{x}}_2$. Wir müssen also nachweisen, dass für alle $\underline{\mathbf{v}} \in \mathbb{R}^2$ gilt $|\mathbf{A} \cdot \underline{\mathbf{v}}| = |\underline{\mathbf{v}}|$. Mit $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$ ist dies aber einfach.
Wir haben nun gezeigt, dass die im Satz beschriebenen Abbildungen Kongruenzabbildungen sind. Wir müssen noch nachweisen, dass *alle* Kongruenzen Φ so dargestellt werden können. Sei $P(0|0)$ der Nullpunkt und $\underline{\mathbf{q}} \neq \underline{\mathbf{0}}$ der Ortsvektor eines zweiten Punktes Q. Durch $\mathbf{A} \cdot \underline{\mathbf{x}} + \underline{\mathbf{b}}$ wird P nach P' abgebildet mit Ortsvektor $\underline{\mathbf{b}}$, der frei

wählbar ist. Der Punkt Q wird abgebildet nach Q' mit Ortsvektor $\mathbf{A}\cdot\underline{\mathbf{q}}+\underline{\mathbf{b}}$ und Abstand $|\mathbf{A}\cdot\underline{\mathbf{q}}| = |\underline{\mathbf{q}}|$ von P'. Durch freie Wahl des Parameters $\varphi \in [0, 2\pi]$ in $\mathbf{A}$ (siehe Satz) lässt sich aber Q auf einen beliebigen Punkt Q' auf dem Kreis mit Mittelpunkt P' und Radius $|\underline{\mathbf{q}}|$ abbilden. Wie wir auf S.28 dargelegt haben, ist nun Φ durch die Bilder P' und Q' von P und Q mit $|\overline{PQ}| = |\underline{\mathbf{q}}| = |\overline{P'Q'}|$ schon fast vollständig festgelegt. Die zwei Alternativen für $\mathbf{A}$ im Satz (gleichsinnig oder gegensinnig) legen dann noch das Bild R' eines dritten Punktes R, der nicht auf der Geraden PQ liegt, fest und damit die Isometrie Φ.

3.3.4 Schlussbemerkungen

Nimmt man noch die Streckungen $\underline{\mathbf{x}} \mapsto r\cdot\underline{\mathbf{x}}$ mit $0 \neq r \in \mathbb{R}$ hinzu, so lassen sich alle *Ähnlichkeitsabbildungen* entsprechend in Matrixform schreiben. Zusätzlich zu den drei kontinuierlichen Parametern $\varphi \in [0, 2\pi]$ und $\underline{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^2$ und dem diskreten Parameter $\det(\mathbf{A}) = \pm 1$ hat man dann noch den Streckungsfaktor $|r| > 0$.
Die Kongruenzen im Raum bilden eine Gruppe mit 6 kontinuierlichen Parametern (neben ± 1 für gleich– bzw. gegensinnig). Das Bild des Ursprungs P kann man frei wählen (3 Parameter), das Bild Q' eines zweiter Punktes Q muss dann auf der Oberfläche einer Kugel mit Mittelpunkt P' und Radius $|PQ|$ liegen (2 Parameter). Das Bild R' eines dritten Punktes R, der nicht auf PQ liegt, kann dann noch frei auf einem Kreis um die Achse $P'Q'$ gewählt werden, so dass $|P'R'| = |PR|$ und $|Q'R'| = |QR|$. Für das Bild eines vierten Punktes S, der nicht in der Ebene durch P, Q und R liegt, gibt es dann nur noch eine diskrete Wahl (gleich– bzw. gegensinnig). Ganz analog zu den Kongruenzen der Ebene ist eine Isometrie des Raumes gegeben durch $\underline{\mathbf{x}} \mapsto \mathbf{A}\cdot\underline{\mathbf{x}}+\underline{\mathbf{b}}$, wo jetzt $\underline{\mathbf{b}} \in \mathbb{R}^3$ und $\mathbf{A}$ eine sog. <u>*orthogonale*</u> 3×3–Matrix ist, also eine 3×3–Matrix, deren Spalten eine ortho*normale* Basis bilden. (Die drei Zeilen von $\mathbf{A}$ bilden dann übrigens automatisch auch eine ortho*normale* Basis — trotzdem nennt man solche Matrizen ortho*gonal* und nicht ortho*normal*). orthogonale Matrix

Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$
Eine weitere sehr interessante Untermenge von Matrizen sind die 2×2–Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ mit } a, b \in \mathbb{R}\,.$$

Die Summe (klar) und das Produkt zweier solcher Matrizen ist wieder von dieser Form,

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & -f \\ f & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & -d \\ d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

mit $e = a\cdot c - b\cdot d$ und $f = a\cdot d + b\cdot c$ und ausserdem ist die Multiplikation in dieser Untermenge *kommutativ*. Ausser der Nullmatrix haben auch alle solchen Matrizen eine Inverse,

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}\,.$$

Eine Menge auf der man mit den üblichen Rechenregeln (Assoziativität, Kommutativität, Distributivität) addieren, subtrahieren, multiplizieren und (ausser durch null) dividieren kann, heisst ein *Körper*. Der Körper dieser speziellen 2×2–Matrizen heisst *Körper $\mathbb{C}$ der Komplexen Zahlen*. Er enthält die reellen Zahlen

Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen

$$a \in \mathbb{R} \leftrightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{C} \,,$$

und *Wurzeln aller negativen reellen Zahlen*

Wurzeln negativer Zahlen

$$\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b^2 & 0 \\ 0 & -b^2 \end{pmatrix} \leftrightarrow -b^2 \in \mathbb{R} \,.$$

Hauptsatz der Algebra

Hauptsatz der Algebra

Zu jedem Polynom $p(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + x^n$ vom Grad n gibt es n Nullstellen $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ mit

$$p(x) = (x - c_1) \cdot (x - c_2) \cdot \ldots \cdot (x - c_n) \,.$$

Beispiel

$$\begin{aligned} x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1) \quad &\leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x+1 & 0 \\ 0 & x+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x^2 - x + 1 & 0 \\ 0 & x^2 - x + 1 \end{pmatrix} \\ &= \quad \begin{pmatrix} x+1 & 0 \\ 0 & x+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x - 1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & x - 1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x - 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & x - 1/2 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Statt als 2×2–Matrix schreibt man komplexe Zahlen meist als $a + b \cdot \mathrm{i}$ mit $\mathrm{i} \cdot \mathrm{i} = -1$, siehe oben, wo wir Wurzeln negativer reeller Zahlen betrachteten.
Als lineare Abbildungen der Ebene auf sich sind komplexe Zahlen *Drehstreckungen* mit Streckungsfaktor $\sqrt{a^2 + b^2}$, Drehwinkel $\varphi = \arctan(b/a)$ und Drehzentrum $(0|0)$.

Bereits vor über 300 Jahren hat man mit komplexen Zahlen gerechnet und seither hat sich die Sprache *Mathematik* enorm weiter verfeinert. Es ist bedauerlich, dass nur sehr wenige einen zeitgenössischen Dialekt dieser Sprache sprechen.
Es ist Ihre noble Aufgabe, Ihre Schülerinnen und Schüler mit dem Grundwortschatz dieser Sprache und ihren grammatikalischen Grundregeln vertraut zu machen!

Mathematik