

Vorkurs UZH 2015

Mathematik Rechenfertigkeiten

Skript Freitag

Dr. Dominik Tasnady, Mathematik Institut, Universität Zürich
Winterthurerstrasse 190, 8057 Zürich

Skript: Dr. Irmgard Bühler (Überarbeitung: Dr. Dominik Tasnady)

14. August 2015

Inhaltsverzeichnis

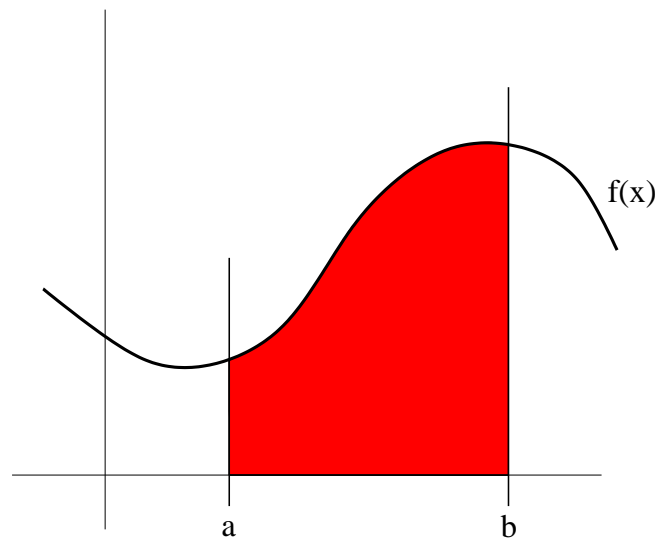
| | |
|--|-----------|
| 1 Grundlagen der Integralrechnung | 2 |
| 1.1 Definition und Bedeutung | 2 |
| 1.2 Unbestimmtes Integral | 6 |
| 1.3 Bestimmtes Integral | 7 |
| 2 Partielle Integration | 11 |
| 3 Integration durch Substitution | 14 |
| 4 Uneigentliche Integrale | 18 |

1 Grundlagen der Integralrechnung

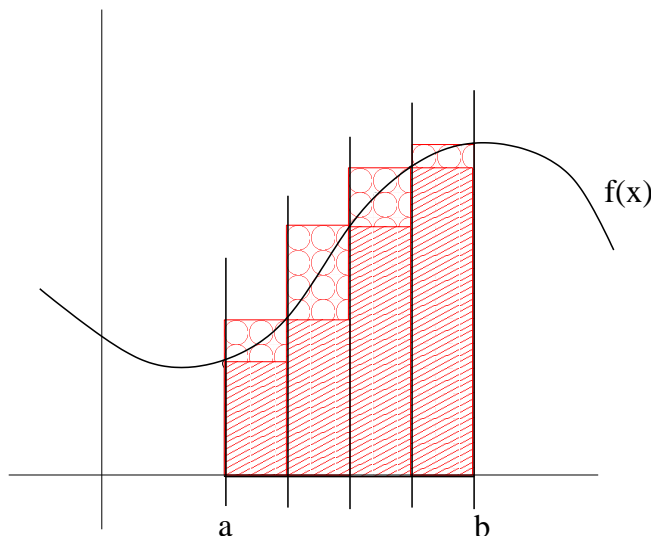
Wir haben in den letzten Tagen die Ableitung, respektive das Differenzieren, kennengelernt. Nun kommen wir zur entgegengesetzten Richtung, der Integralrechnung. Ziel des ersten Teils ist zu zeigen, dass ein Zusammenhang besteht zwischen dem Ausrechnen des Flächeninhaltes unter dem Graphen einer Funktion f und dem Finden einer Funktion F mit der Eigenschaft $F' = f$, einer sogenannten **Stammfunktion** von f . Im zweiten und dritten Teil werden wir Integrationsregeln und Integrationsmethoden behandeln, welche uns helfen, eine gegebene Funktion f zu integrieren. Schliesslich werden wir uns im vierten und letzten Teil noch mit sogenannten uneigentlichen Integralen beschäftigen.

1.1 Definition und Bedeutung

Wir betrachten eine Funktion $f(x)$, welche überall ≥ 0 ist. Wie gross ist die Fläche, welche zwischen dem Graphen der Funktion und der x -Achse sowie den vertikalen Geraden $x = a$ und $x = b$ liegt?



Wir teilen diese Fläche in n Stücke auf, und zwar so, dass wir sie einerseits von unten und andererseits von oben approximieren:



Wir brauchen folgende Bezeichnungen:

Innere Treppenfläche U_n : Die schraffierte Fläche

Äussere Treppenfläche O_n : Die schraffierte plus die gekreiselte Fläche

Unterteilen wir nun die Fläche in immer kleinere Stücke, so wird die Approximation immer besser. Anders gesagt, bekommen wir den korrekten Flächeninhalt, sobald wir $n \rightarrow \infty$ laufen lassen.

Definition 1. Falls

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n,$$

wird dieser Limes als *bestimmtes Integral* bezeichnet, und wir schreiben

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Für eine positive Funktion entspricht also das Integral gerade der Fläche unter der Kurve.

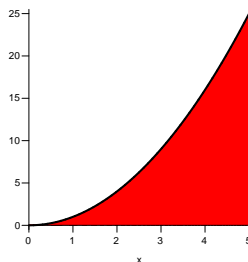
Bemerkung. Für eine stetige Funktion ist obige Bedingung immer erfüllt. Es gibt aber Funktionen, bei welchen das nicht mehr zutrifft. Betrachte

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \cap [0, 1] \end{cases}$$

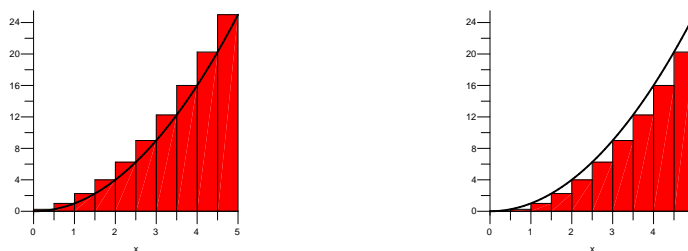
Dann gelten $U_n = 0$ und $O_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0 \neq 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} O_n$. Der Graph dieser Funktion lässt sich nicht zeichnen, da der Wert beliebig schnell zwischen 0 und

1 hin und her springt. In diesem Fall ist auch nicht klar, was die Fläche unter diesem Graphen sein soll. Dies erfordert eine tiefere Behandlung der Integrationstheorie.

Beispiel. Wir betrachten die Funktion $f(x) = x^2$ und wollen die Fläche von 0 bis zu einer Zahl b berechnen.



Wir unterteilen die Fläche zuerst wieder in n Teile und approximieren sie von oben sowie von unten.



Wir werden folgende Formel benutzen: $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Wir erhalten für die äussere Treppenfläche

$$\begin{aligned}
 O_n &= \frac{b}{n} \cdot \left(\frac{b}{n}\right)^2 + \frac{b}{n} \cdot \left(\frac{2b}{n}\right)^2 + \frac{b}{n} \cdot \left(\frac{3b}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{b}{n} \cdot \left(\frac{nb}{n}\right)^2 \\
 &= \frac{b}{n} \cdot \left(\left(\frac{b}{n}\right)^2 + \left(\frac{2b}{n}\right)^2 + \left(\frac{3b}{n}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{nb}{n}\right)^2 \right) \\
 &= \frac{b^3}{n^3} \cdot (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) \\
 &= \frac{b^3}{n^3} \cdot \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) = \frac{b^3}{n^3} \cdot \left(\frac{(n^2+n)(2n+1)}{6} \right) \\
 &= \frac{b^3}{n^3} \cdot \left(\frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} \right) = b^3 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right)
 \end{aligned}$$

also

$$\lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b^3 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right) = \frac{b^3}{3}.$$

Auf die gleiche Art und Weise erhalten wir für die innere Treppenfläche

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{b}{n} \cdot 0^2 + \frac{b}{n} \cdot \left(\frac{b}{n} \right)^2 + \frac{b}{n} \cdot \left(\frac{2b}{n} \right)^2 + \cdots + \frac{b}{n} \cdot \left(\frac{(n-1)b}{n} \right)^2 \\ &= \frac{b^3}{n^3} \cdot (0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2) \\ &= \frac{b^3}{n^3} \cdot \left(\frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6} \right) = b^3 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right) \end{aligned}$$

und für den Limes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b^3 \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \right) = \frac{b^3}{3}.$$

Die zwei Grenzwerte stimmen überein, und somit erhalten wir

$$\int_0^b x^2 dx = \frac{b^3}{3}.$$

Allgemein bekommen wir sogar

$$\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}.$$

1.2 Unbestimmtes Integral

Eine Funktion $F(x)$ heisst *Stammfunktion* der Funktion $f(x)$, falls $F'(x) = f(x)$.

Wenn $F(x)$ eine Stammfunktion von $f(x)$ ist, dann bezeichnet man

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

als *unbestimmtes Integral*. Dabei ist $C \in \mathbb{R}$ eine Konstante, die sogenannte *Integrationskonstante*. Da die Ableitung einer Konstanten 0 ist, können wir jeweils eine Konstante addieren, ohne dass sich die Ableitung ändert. Stammfunktionen sind daher nicht eindeutig. Zwei Stammfunktionen unterscheiden sich aber lediglich durch eine Konstante.

Es reicht aus, die Integrale von ein paar wichtigen Funktionen zu kennen, um integrieren zu können. Zusammen mit den Eigenschaften der Integration sowie wie mit den Methoden

- partielle Integration (Kapitel 2)
- Substitution (Kapitel 3)

können wir sehr viele Integrale berechnen. Es gibt jedoch Funktionen, deren Stammfunktionen sich nicht als eine geschlossene Funktionsgleichung bestimmen lassen.

Darum gleich zu Beginn die unbestimmten Integrale der wichtigsten Funktionen (überprüfen durch Ableiten):

1. $\int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C$
2. $\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$, wobei $n \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
3. $\int e^x dx = e^x + C$
4. $\int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + C$
5. $\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$
6. $\int \cos(x) dx = \sin(x) + C$

Eigenschaften:

- $\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx$ für $c \in \mathbb{R}$

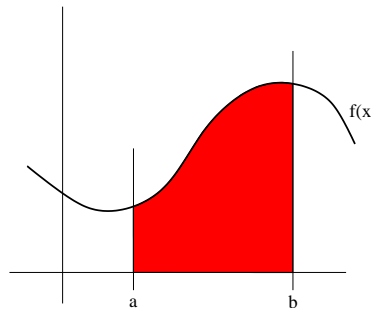
- $$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

1.3 Bestimmtes Integral

Wir haben gesehen, dass das *bestimmte Integral*

$$\int_a^b f(x) dx$$

die Fläche zwischen dem Graphen der *positiven* Funktion $f(x)$ und der x -Achse zwischen den *Integrationsgrenzen* a und b angibt. Im Unterschied zum unbestimmten Integral ist dies eine Zahl, keine Funktion.



Zusätzliche Eigenschaften:

- Für $a \leq c \leq b$ gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

- Vertauschen der Integrationsgrenzen:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Die Berechnung des bestimmten Integrals der Funktion $y = x^2$ war nur möglich, da eine Formel für die Summe der Quadratzahlen existiert. Wenn aber schon die Integration einer so einfachen Funktion schwierig ist, wie soll dann das bestimmte Integral komplizierterer Funktionen berechnet werden? Die entscheidende Idee ist der sogenannte *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung*, der grob gesagt besagt, dass zwischen dem bestimmten und dem unbestimmten Integral, zwei grundlegend verschiedenen Konzepten, eine sehr enge Beziehung besteht. Konkret ist die Aussage folgende:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

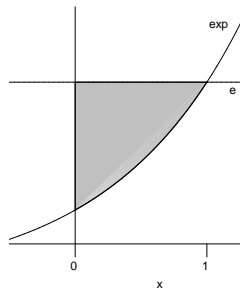
und wir schreiben auch

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b$$

Beispiel.

$$\bullet \int_3^5 x^3 dx = \frac{x^4}{4} \Big|_3^5 = \frac{5^4}{4} - \frac{3^4}{4} = \frac{544}{4} = 136$$

- Gesucht ist die Fläche, die zwischen der y -Achse, dem Graphen von e^x und der konstanten Funktion $y = e$ eingeschlossen ist.

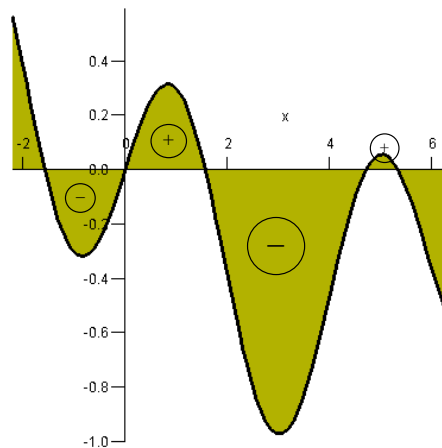


Der Schnittpunkt von e und e^x liegt bei 1, daher sind 0 und 1 die Integrationsgrenzen.

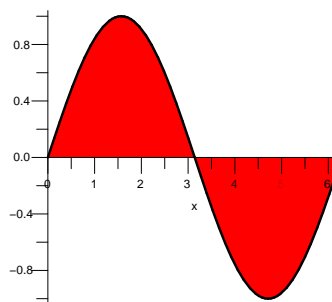
$$\int_0^1 (e - e^x) dx = [ex - e^x]_0^1 = e - e - (-1) = 1$$

Bis jetzt haben wir immer Funktionen $f \geq 0$ betrachtet. Was passiert mit dem Flächeninhalt, wenn die Funktion negativ wird?

Flächen unterhalb der x -Achse werden negativ gezählt (denn bei der Berechnung der jeweiligen Ober- und Untersumme wird die Intervalllänge (positiv) mit dem Funktionswert (negativ!) multipliziert).



Beispiel. Wir wollen die Fläche zwischen dem Graphen von $\sin(x)$ und der x -Achse zwischen 0 und 2π berechnen:



Berechnen wir

$$\int_0^{2\pi} \sin(x) dx = -\cos(2\pi) + \cos(0) = -1 + 1 = 0,$$

entspricht dies nicht der Fläche. Die Fläche oberhalb der x -Achse und diejenige unterhalb der x -Achse heben sich gegenseitig auf.

Die Fläche aber entspricht dem Integral

$$\int_0^{2\pi} |\sin(x)| dx.$$

Wir teilen die Funktion in die positiven und in die negativen Teile auf:

$$\sin(x) \begin{cases} \geq 0, & \text{falls } 0 \leq x \leq \pi \\ \leq 0, & \text{falls } \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$$

und erhalten somit

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} |\sin(x)| dx &= \int_0^{\pi} \sin(x) dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin(x)) dx = -\cos(x) \Big|_0^{\pi} + \cos(x) \Big|_{\pi}^{2\pi} \\ &= -\cos(\pi) - (-\cos(0)) + \cos(2\pi) - \cos(\pi) = -(-1) + 1 + 1 - (-1) = 4.\end{aligned}$$

2 Partielle Integration

Die Partielle Integration entspricht der Produktregel der Differentiation, welche lautet:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g',$$

respektive etwas umgeformt

$$f \cdot g' = (f \cdot g)' - f' \cdot g.$$

Durch Integration beider Seiten, erhalten wir

$$\int f \cdot g' dx = \int (f \cdot g)' dx - \int f' \cdot g dx$$

Da $\int h' dx = h + C$ für jede Funktion h , entspricht dies

$$\boxed{\int f \cdot g' dx = f \cdot g - \int f' \cdot g dx (+C)}$$

Dies nennt man die partielle Integration. Die zu integrierende Funktion muss also ausgedrückt werden können als Produkt zweier Funktionen $f(x) \cdot g'(x)$. Diese Regel gilt sowohl für unbestimmte als auch für bestimmte Integrale. In solchen Formeln wird die Konstante C häufig weggelassen, da sie in den unbestimmten Integralen absorbiert werden kann. Überhaupt muss man mit Formeln, die unbestimmte Integrale enthalten vorsichtig sein. Die Version für bestimmte Integrale nimmt folgende Form an:

$$\boxed{\int_a^b f \cdot g' dx = f \cdot g \Big|_a^b - \int_a^b f' \cdot g dx}$$

Beispiel.

- Um $\int x \cos(x) dx$ zu bestimmen, wählen wir die Funktionen:

$$\begin{array}{ll} f(x) = x & g'(x) = \cos(x) \\ f'(x) = 1 & g(x) = \sin(x) \end{array}$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int x \cos(x) dx &= \int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx \\ &= x \sin(x) - \int \sin(x) dx = x \sin(x) + \cos(x) + C. \end{aligned}$$

Zur Kontrolle, dass dies auch die richtige Stammfunktion ist, können wir die Stammfunktion ableiten:

$$\begin{aligned}(x \sin(x) + \cos(x) + C)' &= 1 \cdot \sin(x) + x \cos(x) - \sin(x) + 0 \\ &= x \cos(x),\end{aligned}$$

was der ursprünglichen Funktion entspricht. Wir haben also richtig integriert!

- Für $\int_1^{e^2} \ln(x) dx$ betrachten wir:

$$\begin{aligned}f(x) &= \ln(x) & g'(x) &= 1 \\ f'(x) &= \frac{1}{x} & g(x) &= x\end{aligned}$$

Damit gilt:

$$\begin{aligned}\int_1^{e^2} \ln(x) dx &= \int_1^{e^2} 1 \cdot \ln(x) dx = x \ln(x) \Big|_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \frac{1}{x} x dx \\ &= e^2 \ln(e^2) - 1 \cdot \ln(1) - x \Big|_1^{e^2} \\ &= e^2 \cdot 2 - \ln(1) - e^2 + 1 \\ &= e^2 + 1.\end{aligned}$$

- Dieses Beispiel zeigt, weshalb man vorsichtig sein muss mit den Formeln für unbestimmte Integrale

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x} &= \int 1 \cdot \frac{1}{x} dx = x \cdot \frac{1}{x} - \int x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) dx \\ &= 1 + \int \frac{dx}{x}\end{aligned}$$

Naiv könnte man daraus schliessen, dass $1 = 0!$ Das Problem ist, dass auf beiden Seiten

der Gleichung unbestimmte Integrale stehen, die implizit jeweils eine Konstante enthalten, aber eben nicht zwingend die gleiche. Man darf damit nicht rechnen wie mit Zahlen!

3 Integration durch Substitution

Wenn die zu integrierende Funktion von der Form $f(g(x))g'(x)$ ist, das heisst, das Integral hat folgende Form

$$\int f(g(x))g'(x) dx ,$$

dann können wir die Funktion $g(x)$ durch eine Variable u ersetzen und danach über u integrieren. Nicht immer ist diese Form einfach abzulesen. Vermuten wir, dass wir Substitution anwenden können, probieren wir es einfach aus, und zwar wie folgt:

(i) Suche eine Funktion, welche wir ersetzen wollen: $u = g(x)$.

(ii) Leite u nach x ab: $\frac{du}{dx} = g'(x)$.

(iii) Löse diese Gleichung nach dx auf: $dx = \frac{du}{g'(x)}$.

(iv) Ersetze im Integral $g(x)$ durch u und dx durch $\frac{du}{g'(x)}$. Falls es ein bestimmtes Integral ist und Integrationsgrenzen a und b vorkommen, werden diese ersetzt durch $u(a)$ und $u(b)$.

$$\begin{aligned} g(x) &\leftrightarrow u \\ dx &\leftrightarrow \frac{du}{g'(x)} \end{aligned}$$

$$\text{Integrationsgrenzen } a, b \leftrightarrow u(a), u(b)$$

(v) Das $g'(x)$ sollte sich nun rauskürzen, so dass im Integral kein x mehr vorkommt. Passiert das nicht, können wir nicht Substitution anwenden oder müssen eine andere Substitution vornehmen. Sonst weiter zum nächsten Schritt.

(vi) Es gilt nun:

$$\boxed{\begin{aligned} \int f(g(x))g'(x) dx &= \int f(u)du \\ \text{respektive } \int_a^b f(g(x))g'(x) dx &= \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du \end{aligned}}$$

Das neue Integral entspricht also dem alten Integral.

(vii) Beim unbestimmten Integral müssen wir wieder $g(x)$ für u einsetzen, um die Lösung zu bekommen.

Bemerkung. Anstatt das bestimmte Integral mit Integrationsgrenzen direkt zu lösen, kann das Integral auch zuerst nur unbestimmt, das heisst ohne Integrationsgrenzen, betrachtet werden. Dann müssen nach dem Lösen des Integrals und der Rücksubstitution (u durch $g(x)$ ersetzen) noch die Integrationsgrenzen eingesetzt werden.

Beispiel.

- Wir wollen das Integral $\int xe^{x^2} dx$ lösen und setzen dafür $u(x) = x^2$. Es folgt, dass

$$\frac{du}{dx} = 2x, \quad \text{und somit} \quad dx = \frac{du}{2x}.$$

Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} \int xe^{x^2} dx &= \int xe^u \frac{du}{2x} \\ &= \frac{1}{2} \int e^u du \\ &= \frac{1}{2} e^u + C = \frac{1}{2} e^{x^2} + C. \end{aligned}$$

- Nun ein bestimmtes Integral. Wir berechnen $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx$:

Wir setzen $u = x + 1$ und erhalten $\frac{du}{dx} = 1$, also $du = dx$.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx &= \int_{u(0)}^{u(1)} \frac{1}{\sqrt{u}} du \\ &= \int_1^2 u^{-\frac{1}{2}} du = 2u^{\frac{1}{2}} \Big|_1^2 = 2\sqrt{2} - 2. \end{aligned}$$

Bemerkung. *Vergleich Partielle Integration \leftrightarrow Substitution:*

Wann benutzen wir partielle Integration, wann die Substitution? Grundsätzlich können wir drei Punkte festhalten.

1. Finden wir im Integral eine Funktion einer Funktion? Also so etwas wie $f(g(x))$?
—→ Substitution (d.h. $g(x)$ ersetzen)
2. Werden im Integral zwei Funktionen multipliziert, es kommen aber keine Funktionen in Funktionen vor? —→ Partielle Integration
3. Ist das Integral nach Anwendung einer der Methoden komplizierter als vor dem Integrieren, dann wurde entweder die falsche Methode gewählt, oder es muss etwas anderes substituiert oder die partielle Integration anders angewendet werden. (In seltenen Fällen muss das Integral zuerst komplizierter gemacht werden, um es dann lösen zu können, aber das ist für Fortgeschrittene.)

Es braucht etwas Intuition, um jeweils die richtige Methode richtig auszuwählen... Mit etwas Übung klappt das aber schon. Einfach nicht aufgeben und ausprobieren.

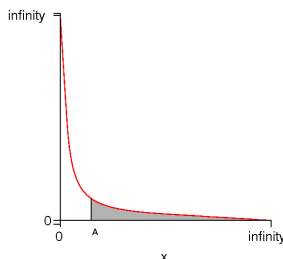
Beispiel. Wann soll welche Methode wie angewendet werden? Ein paar Beispiele:

| Funktion | Methode | Was wird wie ersetzt? |
|---|---------|-----------------------|
| $\sin\left(\frac{3x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)$ | | |
| $t \cdot \cos(t)$ | | |
| $e^y \cos(y)$ | | |
| a^{5x} | | |
| $\ln(x)$ | | |
| $\ln\left(\frac{1}{8-3x}\right)$ | | |
| $\frac{\sqrt{\ln(x)}}{x}$ | | |
| $x^2 \cos(x)$ | | |
| $(3x^2 - 5)^6$ | | |

4 Uneigentliche Integrale

Fragestellung: Kann man eine nicht beschränkte Fläche berechnen? Was passiert, wenn die Integrationsgrenzen unendlich oder Polstellen der Funktion sind?

Fall 1: Kann man die Fläche unter dem Graphen von $f(x)$ auf dem Intervall $[A, \infty[$ messen?



Wenn

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_A^N f(x) dx$$

existiert, dann nennt man dies ein *uneigentliches Integral* und schreibt:

$$\int_A^{\infty} f(x) dx$$

Beispiel.

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n x \cdot e^{-x} dx.$$

Wir lösen das Integral $\int_0^N x e^{-x} dx$ mit partieller Integration:

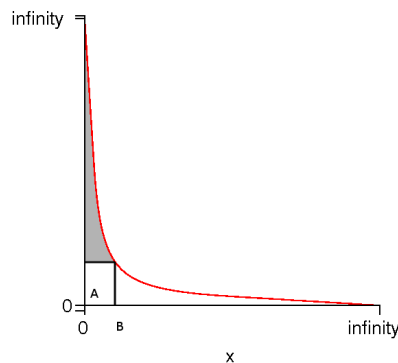
$$\begin{aligned} f(x) &= x & g'(x) &= e^{-x} \\ f'(x) &= 1 & g(x) &= -e^{-x} \end{aligned}$$

$$\int_0^N x e^{-x} dx = -x e^{-x} \Big|_0^N + \int_0^N e^{-x} dx = -N e^{-N} - e^{-N} - (-e^{-0}) = -e^{-N}(N+1) + 1$$

Wegen $\lim_{N \rightarrow \infty} (-e^{-N}(N+1)) \rightarrow 0$ existiert der Grenzwert und es gilt:

$$\int_0^{\infty} x e^{-x} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_0^N x e^{-x} dx = 1.$$

Fall 2: Kann man die Fläche unter dem Graphen von $f(x)$ auf einem Intervall messen, welches eine Polstelle bei A beinhaltet?



Analog zum ersten Fall: Wenn

$$\lim_{\alpha \rightarrow A} \int_{\alpha}^B f(x) dx$$

existiert, dann existiert das uneigentliche Integral:

$$\int_A^B f(x) dx$$

Beispiel. Betrachte $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$. Da

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} \Big|_{\varepsilon}^1 = 2 - 2\sqrt{\varepsilon}$$

und $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sqrt{\varepsilon} = 0$, folgt, dass $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2$ existiert.

Beispiel. Betrachte $\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx$. Da

$$\int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx = \ln(x) \Big|_{\varepsilon}^1 = \ln(1) - \ln(\varepsilon) = -\ln(\varepsilon) \rightarrow \infty \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0,$$

existiert $\int_0^1 \frac{1}{x} dx$ nicht.