Vorkurs UZH 2015

Mathematik Rechenfertigkeiten

Skript Donnerstag

Dr. Dominik Tasnady, Mathematik Institut, Universität Zürich
Winterthurerstrasse 190, 8057 Zürich
Skript: Dr. Irmgard Bühler (Überarbeitung: Dr. Dominik Tasnady)

13. August 2015

Inhaltsverzeichnis

1 Kurvendiskussion

1.1 Extrema einer Funktion

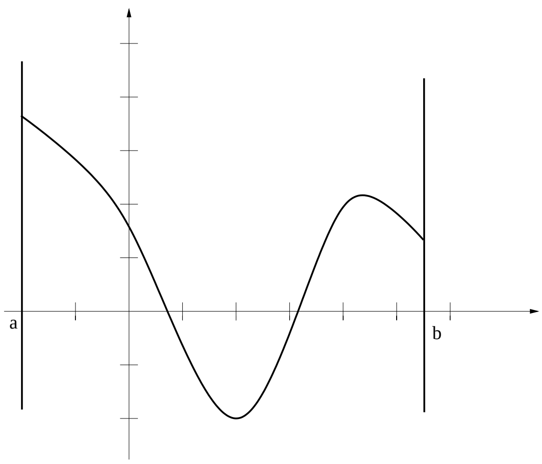
Wie sieht die Kurve einer gegebenen Funktion $f(x)$ aus? Um eine Funktion aufzeichnen zu können, hilft es,

1. die Nullstellen der Funktion sowie
2. die Minima und Maxima der Funktion

zu kennen. Wir wissen bereits, dass die Nullstellen bestimmt werden, indem die Funktion gleich Null gesetzt

$$f(x) = 0$$

und dann nach x aufgelöst wird. Wie sieht es aber mit den Minima, respektive den Maxima aus? Wir betrachten die folgende Funktion f mit Definitionsbereich $[a, b]$:



Wo liegen die Maxima und Minima? Gibt es unterschiedliche Typen von Maxima respektive Minima?

Definition. Die Funktion $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ hat an der Stelle $x_{max} \in \mathbb{D}$ ein *absolutes Maximum*, falls gilt

$$f(x_{max}) \geq f(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{D}$$

und ein *absolutes Minimum* in $x_{min} \in \mathbb{D}$, falls

$$f(x_{min}) \leq f(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{D}.$$

Weiter hat die Funktion f an der Stelle x_{max} ein *relatives Maximum*, falls ein beliebig kleines Intervall $I \subset \mathbb{D}$ um x_{max} herum existiert (also $x_{max} \in I$), so dass

$$f(x_{max}) \geq f(x) \qquad \text{für alle } x \text{ im Intervall } I$$

respektive ein *relatives Minimum* $x_{min} \in I$, falls

$$f(x_{min}) \leq f(x) \qquad \text{für alle } x \text{ im Intervall } I.$$

Zusammengefasst:

absolutes Maximum x_{max}	:	$f(x_{max})$	$\geq$	$f(x)$	für alle $x \in \mathbb{D}$
absolutes Minimum x_{min}	:	$f(x_{min})$	$\leq$	$f(x)$	für alle $x \in \mathbb{D}$
relatives Maximum x_{max}	:	$f(x_{max})$	$\geq$	$f(x)$	für alle $x \in I$
relatives Minimum x_{min}	:	$f(x_{min})$	$\leq$	$f(x)$	für alle $x \in I$

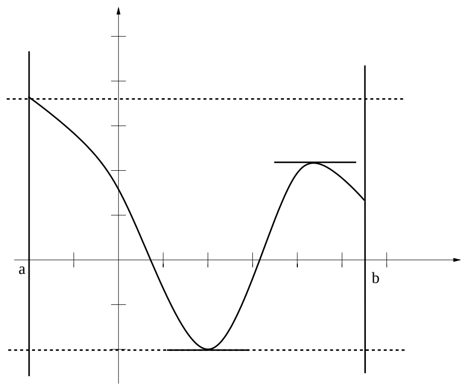
Minima und Maxima werden zusammen auch als *Extrema* oder *Extremalwerte* bezeichnet.

Bemerkung. Manchmal werden die relativen Extrema auch *lokale* Extrema genannt.

Satz 1. *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar auf $[a, b]$. Dann kann f nur Extremalwerte haben*

1. *an den Randpunkten a und b oder*
2. *falls $f'(x) = 0$.*

Um dies einzusehen, betrachten wir die folgende Funktion



Die Randpunkte müssen immer extra betrachtet werden, da sie immer Extremalwerte sind. In diesem Fall ist a ein absolutes Maximum, während b ein lokales Minimum ist.

Wenden wir uns nun den Punkten innerhalb des Intervalls (a, b) zu, wobei wir uns im Moment nicht darauf konzentrieren, ob es sich um relative oder um absolute Extrema handelt.

Wir sehen, dass bei den Extrema die Steigung der Funktion gleich Null ist. Da die Steigung der ersten Ableitung entspricht, bedeutet dies

$$x_e \text{ Extremum der Funktion } f \quad \Rightarrow \quad f'(x_e) = 0.$$

Wie bestimmen wir nun aber, ob x_e ein Maximum oder ein Minimum ist? Betrachten wir nochmals unsere Funktion von oben:

Wir laufen nun von links nach rechts dem Graphen der Funktion entlang. Am Anfang ist die Steigung negativ, wir müssen den Berg hinunter laufen. Unten angekommen ist sie kurz gleich Null und danach wird sie positiv, wir laufen den Berg hinauf. Die Steigung wechselt somit *von negativ zu positiv*. Die Steigung entspricht aber der ersten Ableitung der Funktion. Dies bedeutet, dass die Ableitung immer grösser wird, sie also selbst eine positive Steigung hat. Die Ableitung der ersten Ableitung entspricht der zweiten Ableitung. Diese muss also positiv sein.

Beim Maximum ist die Situation gerade umgekehrt. Zuerst laufen wir den Berg hinauf zum Maximum, das heisst die erste Ableitung ist positiv. Danach gehts den Berg hinunter, also wird

die erste Ableitung negativ. Da die erste Ableitung also immer kleiner wird, muss die zweite Ableitung negativ sein.
Sei x_e ein Extremum der Funktion f, also $f'(x_e) = 0$. Wir erhalten folgendes:

$$\boxed{\begin{array}{lcl} f''(x_e) > 0 & \Rightarrow & x_e \text{ ist ein Minimum} \\ f''(x_e) < 0 & \Rightarrow & x_e \text{ ist ein Maximum} \end{array}}$$

Falls $f''(x_e) = 0$ gilt, können wir keine definitive Aussage machen, ohne dass wir noch weitere Ableitungen berechnen würden. Es ist sowohl möglich, dass x_e ein Maximum oder ein Minimum ist, aber auch, dass keines von beiden der Fall ist und bei x_e ein sogenannter Sattelpunkt vorkommt. Wir werden diesen Fall weiter unten betrachten.

Wollen wir nun noch bestimmen, ob es sich um ein absolutes oder ein relatives Extremum handelt, müssen wir die oben berechneten Extremalwerte im Intervall (a, b) berechnen und diese zusammen und mit den Funktionswerten $f(a)$ sowie $f(b)$ vergleichen, um zu bestimmen, welcher von diesen Werten am grössten, respektive am kleinsten ist. Es können auch mehrere absolute Extrema auftreten, falls die Werte übereinstimmen.

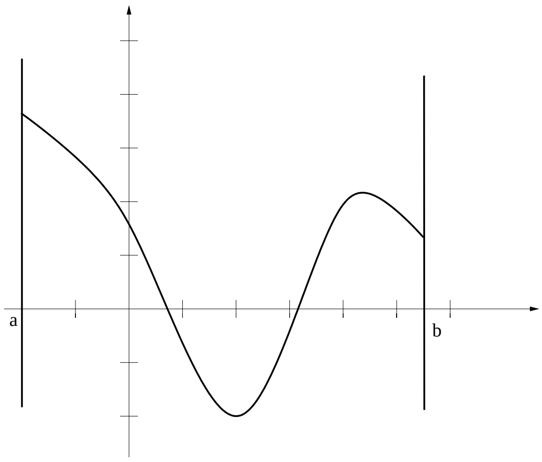
Wir gehen also wie folgt vor, um die Extrema von f zu finden:

1. Berechne zunächst $f(a)$ und $f(b)$.
2. Berechne die Nullstellen x_e der Ableitung f' in (a, b).
3. Berechne die zweite Ableitung $f''(x)$ und setze jede Nullstelle x_e von f' in f'' ein. Durch vergleichen von $f''(x_e)$ mit 0 erfahren wir, ob f in x_e ein Minimum oder ein Maximum hat, oder ob keines von beidem der Fall ist.
4. Berechne alle Funktionswerte an den Stellen x_e, das heisst alle $f(x_e)$.
5. Vergleiche alle gefundenen Maxima und Minima in (a, b) – das heisst die $f(x_e)$'s – miteinander sowie mit den Werten $f(a)$ und $f(b)$, um zu entscheiden, welche Extrema nur relativ sind und welche absolut.

Bemerkung. Es ist bei dieser Diskussion wichtig, dass die Funktion überall differenzierbar ist. Ist dies nicht der Fall, funktioniert das Verfahren nicht mehr. So hat beispielsweise die Betragsfunktion in 0 ein absolutes Minimum, ist dort aber nicht differenzierbar ("Ecke"), also kann die Ableitung insbesondere nicht 0 sein. Ebenso gibt es Funktionen, die in den Randpunkten nicht differenzierbar und deren Randpunkte keine Extrema sind.

1.2 Wendepunkte

Um festzustellen, ob ein Extremum ein Maximum oder ein Minimum ist, haben wir die zweite Ableitung betrachtet. Welche geometrische Bedeutung hat die zweite Ableitung? Die erste Ableitung ist ein Mass dafür, wie steil die Kurve ist. Zudem gibt uns das Vorzeichen der Ableitung an, ob die Kurve steigend ist ($f' > 0$) oder fallend ($f' < 0$). Um die zweite Ableitung zu verstehen, betrachten wir nochmals den Graphen aus dem letzten Abschnitt.



Die Steigung ist ist zu Beginn negativ und nimmt weiter ab. Die Kurve wird immer steiler, bis sie eine steilste Stelle erreicht. (f' ist am kleinsten, d.h. am "negativsten".) Danach nimmt die Steigung wieder zu, wird Null und dann sogar positiv. Wieder erreicht sie eine steilste Stelle. (f' ist hier am grössten.) Danach nimmt die Steigung wieder ab. Dort, wo die erste Ableitung immer grösser wird ($f'' > 0$), ist die Kurve eine *Linkskurve*. Wenn sie ansteigt, wird sie dabei immer steiler. Wenn sie hingegen fällt, so wird sie immer weniger steil. Dort, wo die erste Ableitung immer kleiner wird ($f'' < 0$), ist die Kurve eine *Rechtskurve*. Wenn sie also ansteigt, wird sie immer weniger steil. Wenn sie hingegen fällt, wird sie immer steiler. Die zweite Ableitung alleine sagt also nichts darüber aus, ob die Kurve steigend oder fallend ist.

Zusammengefasst:

$$\boxed{\begin{array}{lll} f'' > 0 & \Rightarrow & \text{Kurve ist eine Linkskurve} \\ f'' < 0 & \Rightarrow & \text{Kurve ist eine Rechtskurve} \end{array}}$$

Wenn eine Rechtskurve zu einer Linkskurve wird – oder umgekehrt – , muss die Kurve “wenden”. An diesen Wendepunkten muss gemäss der obigen Regel zwangsläufig $f'' = 0$ gelten. Wendepunkte sind jeweils die Punkte, an welchen die Kurve (zumindest lokal) am steilsten ist.

$$\boxed{x \text{ ist Wendepunkt} \quad \Rightarrow \quad f''(x) = 0}$$

Bemerkung. $f''(x) = 0$ ist eine *notwendige* Bedingung für einen Wendepunkt. D.h. an einem Wendepunkt ist die zweite Ableitung gleich Null. Es ist jedoch keine *hinreichende* Bedingung. Es ist also möglich, dass ein Punkt kein Wendepunkt ist, obschon die zweite Ableitung gleich Null ist, wie folgendes Beispiel zeigt:

$$f(x) = x^4 \quad \Longrightarrow \quad f''(x) = 12x^2 \quad \Longrightarrow \quad f''(0) = 0$$

0 ist aber ein Minimum und kein Wendepunkt. Ein ähnliches Phänomen haben wir schon bei den Extrema angetroffen. $f'(x) = 0$ ist notwendig (ausser bei den Randpunkten), aber nicht hinreichend für ein Extremum.

Um festzustellen, dass ein Punkt x_0 mit $f''(x_0) = 0$ tatsächlich ein Wendepunkt ist, kann man entweder überprüfen, dass f'' dort wirklich das Vorzeichen wechselt, indem man Punkte ein wenig rechts und links von x_0 in f'' einsetzt und das Vorzeichen vergleicht. Oder aber man zeigt, dass $f''' \neq 0$. (Dies bedeutet auch, dass f'' an ihrer Nullstelle x_0 wirklich das Vorzeichen ändert.)

Definition. Ein Wendepunkt, der auch ein kritischer Punkt ist (d.h. $f'(x) = 0$), heisst *Sattelpunkt* (oder Terrassenpunkt).

Beispiel. Bestimme die Extremalwerte der Funktion $f(x) = x^3(x-1)^2$ im Intervall $[-1, 2]$.

1. $f(-1) = -4 \quad$ und $\quad f(2) = 8$.
2. Erste Ableitung f':

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2(x-1)^2 + x^3 \cdot 2(x-1) \\ &= x^2(3(x-1)^2 + 2x(x-1)) \\ &= x^2(x-1)(3(x-1) + 2x) \\ &= x^2(x-1)(5x-3); \end{aligned}$$

   also sind $0, \frac{3}{5}$ und 1 Nullstellen von f'. Diese liegen alle im Interval $(-1, 2)$.

3. Zweite Ableitung $f''(x)$:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= (2x(x-1)+x^2)(5x-3)+x^2(x-1)5 \\
&= (2x^2-2x+x^2)(5x-3)+5x^3-5x^2 \\
&= (3x^2-2x)(5x-3)+5x^3-5x^2 \\
&= 15x^3-19x^2+6x+5x^3-5x^2 \\
&= 20x^3-24x^2+6x
\end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
f''(0) &= 0 \\
f''\left(\frac{3}{5}\right) &= 20 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 - 24 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 + 6 \cdot \frac{3}{5} \\
&= \frac{1}{5^3} \cdot (20 \cdot 27 - 24 \cdot 9 \cdot 5 + 6 \cdot 3 \cdot 25) = -\frac{90}{125} < 0 \\
f''(1) &= 20 - 24 + 6 = 2 > 0
\end{aligned}$$

Also hat f in $\frac{3}{5}$ ein Maximum und in 1 ein Minimum. Was ist nun bei 0? Wir betrachten die Funktion f links und rechts von der Null. Sei ε eine ganz kleine Zahl > 0. Dann gilt:

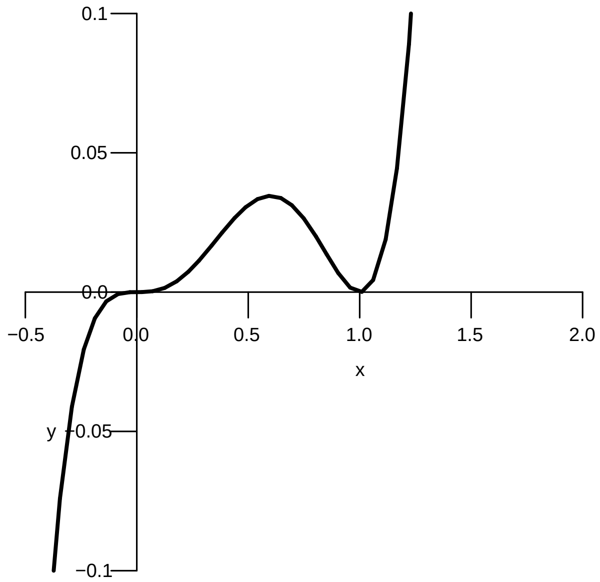
$$f(-\varepsilon) < 0; \qquad f(\varepsilon) > 0$$

Also hat f *keinen* Extremwert in 0 (sondern einen Sattelpunkt).

4. Berechne die $f(x_e)$'s:

$$f(0) = 0 \qquad f(1) = 0 \qquad f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{3^3 \cdot 2^2}{5^5}$$

5. Vergleichen wir die gefundenen Extremalwerte in $(-1, 2)$ mit $f(-1)$ und $f(2)$, so sehen wir, dass diese nur relative Extrema sind, während $f(-1)$ und $f(2)$ absolute Extrema sind.



Die Funktion $f(x) = x^3(x-1)^2$

1.3 Asymptotisches Verhalten

In der bisherigen Diskussion haben wir uns auf das Auffinden spezieller Punkte (Nullstellen, Extrema, Wendepunkte) konzentriert. Eine weitere Frage, die sich im Zusammenhang mit der Kurvendiskussion stellt, ist die Frage nach dem asymptotischen Verhalten der Funktion. Was passiert, wenn man immer grössere Werte für x einsetzt? Oder anders ausgedrückt: Was ist $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$?

Die folgenden drei Beispiele illustrieren die unterschiedlichen Situationen, die bei dieser Fragestellung auftreten können.

1. $f(x) = -x^3 + 3x^2 + x - 1$ (Polynome)
2. $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ (Rationale Funktionen)
3. $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$

Bei allen drei Beispielen entsteht das Problem dadurch, dass man nicht einfach ∞ für x einsetzen kann. Wenn man es ganz naiv einmal versucht, so erhält man wenig sinnvolle Ausdrücke wie $\infty - \infty$ oder $\frac{\infty}{\infty}$. Um das Verhalten der Funktion für $x \to \pm\infty$ zu verstehen, muss man also die *Grenzwerte* untersuchen. Je nach Situation sind dabei andere Methoden und Überlegungen hilfreich. Grenzwerte sind mathematisch nicht ganz einfach. Wir werden uns daher hier auf anschauliche Überlegungen beschränken.

1. Polynome

Für Polynome gibt es eine einfache Regel:

Ein Polynom verhält sich asymptotisch wie seine höchste Potenz (mit Vorzeichen).

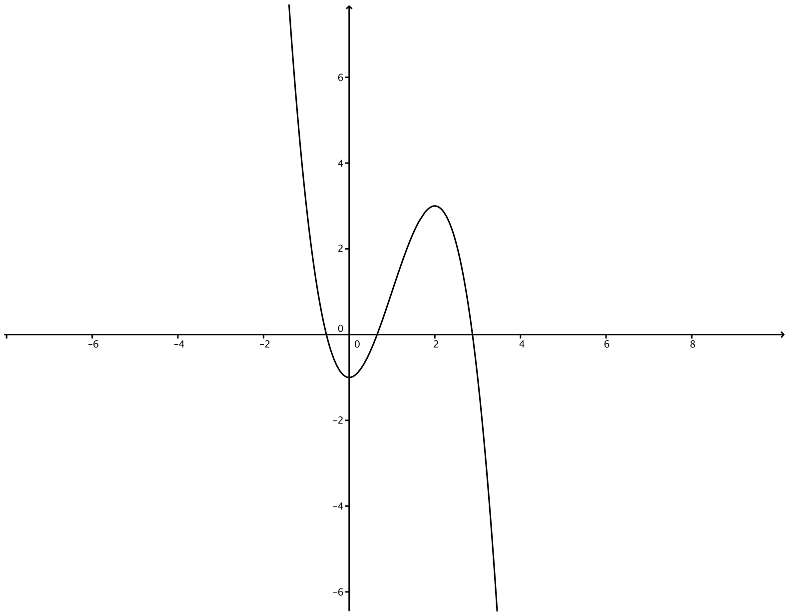
Für das obige Beispiel bedeutet das, dass sich $f(x) = -x^3 + 3x^2 + x - 1$ asymptotisch wie $y = -x^3$ verhält, d.h.

$$\lim_{x\to\infty} -x^3 + 3x^2 + x - 1 = \lim_{x\to\infty} -x^3 = -\infty$$

Um zu verstehen, weshalb diese Regel gilt, formen wir das Polynom folgendermassen um:

$$-x^3 + 3x^2 + x - 1 = -x^3 \left(1 - \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)$$

Für sehr grosse (oder sehr negative) Werte von x wird der Ausdruck in der Klammer nahezu 1, da die Brüche jeweils sehr klein werden. Wir können nun schliessen, dass für sehr grosse (oder sehr negative) Werte das Polynom sich immer mehr der Funktion $y = -x^3$ annähert.



2. Rationale Funktionen

Eine rationale Funktion ist ein Bruch von Polynomen. Bei solchen Funktionen hilft ein Trick, um das asymptotische Verhalten zu verstehen. Wir kürzen den Bruch mit der höchsten Potenz von x:

$$\frac{x^3}{x^2-1} = \frac{1}{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}$$

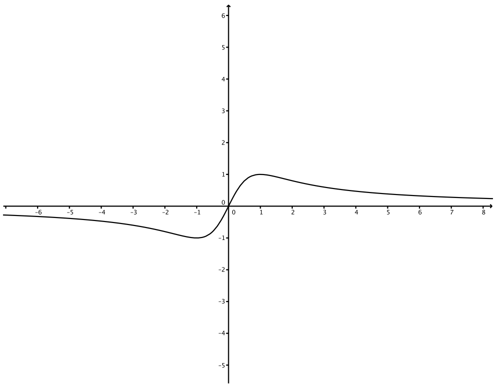
Wieder sieht man, dass alle die Brüche mit einer Potenz von x im Nenner für $x \to \pm\infty$ gegen Null gehen. Wiederum ist also nur die höchste Potenz von x relevant. Wir bezeichnen die höchste Potenz eines Polynoms $P(x)$ als seinen *Grad*, $\deg(P)$. Für die rationale Funktion $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ sind somit folgende drei Fälle zu unterscheiden:

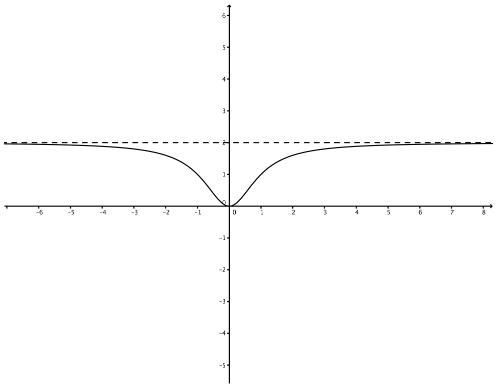
(a) $\deg(P) < \deg(Q)$:
In diesem Fall nähert sich die Funktion asymptotisch 0 an.
Beispiel:

$$\frac{2x}{x^2+1} = \frac{\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} \to 0 \quad \text{für} \quad x \to \pm\infty$$

(b) $\deg(P) = \deg(Q)$:
In diesem Fall nähert sich die Funktion asymptotisch einem konstanten (endlichen) Wert an.
Beispiel:

$$\frac{2x^2}{x^2+1} = \frac{2}{1+\frac{1}{x^2}} \to 2 \quad \text{für} \quad x \to \pm\infty$$





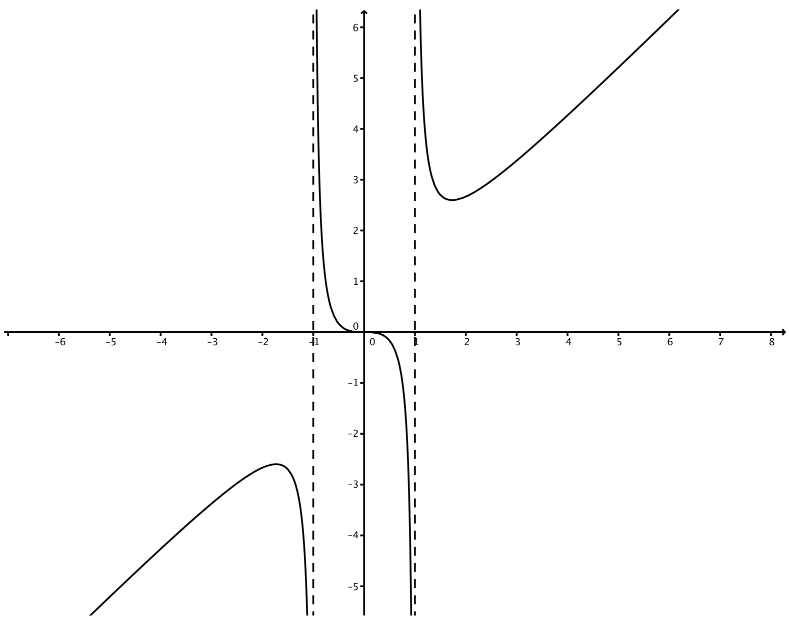
(c) $\deg(P) > \deg(Q)$:

In diesem Fall geht die Funktion für $x \to \pm\infty$ gegen ∞ oder $-\infty$. Welcher der beiden Fälle auftritt, hängt von den Vorzeichen von Zähler und Nenner ab.

Beispiel:

$$\frac{x^3}{x^2-1} = \frac{1}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}} \to \infty \quad \text{für} \quad x \to \infty \,,$$

da der Nenner (und somit der Bruch) für grosse Werte von x positiv ist. Analog geht man für $x \to -\infty$ vor. Tatsächlich kann man noch genauere Aussagen machen, indem man eine Asymptote bestimmt. Wir lassen diese Diskussion hier aber weg. (Siehe Unterlagen vom Mittwoch; Polynomdivision.)



Dieses letzte Beispiel zeigt, dass bei rationalen Funktionen noch eine andere Art von asymptotischem Verhalten vorkommen kann. Bei den Nullstellen des Nenners (d.h. $x = -1$ und $x = 1$) ist die Funktion nicht definiert. Würde man $x = 1$ einsetzen, so erhielte man den unbestimmten

Ausdruck $\frac{1}{0}$. Es ist also wieder ein Grenzwert gesucht, der diesem Ausdruck Sinn verleiht.
Da $x = 1$ keine Nullstelle des Zählers ist, was ja zum Ausdruck $\frac{0}{0}$ führen würde (siehe nächster Abschnitt), liegt die Vermutung nahe, dass die Funktion für $x \to 1$ gegen ∞ geht. Im Gegensatz zur bisherigen Diskussion (Grenzwerte für $x \to \infty$) kann man die Definitionslücke aber von *zwei* Seiten annähern. In der Tat zeigt der Graph oben, dass die Funktion links von der Lücke $x = 1$ gegen $-\infty$ und rechts davon gegen ∞ konvergiert. Man muss also unterscheiden, ob man sich der Lücke von links oder von rechts nähert. Entscheidend ist dabei das Vorzeichen. Setzt man beispielsweise für x einen Wert ein, der ein kleines bisschen grösser ist als 1, so sind sowohl Zähler als auch Nenner – und somit der ganze Ausdruck – positiv. Das bedeutet aber, dass die Funktion von rechts gegen $x = 1$ kommend gegen ∞ geht (wie auch der Graph zeigt). Man schreibt dafür

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^3}{x^2 - 1} = \infty.$$

Mit analogen Überlegungen findet man auch

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty.$$

3. Die Regeln von de l'Hôpital

Im dritten Beispiel ist folgender Grenzwert gesucht:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x}$$

Da sowohl der Zähler als auch der Nenner gegen ∞ konvergieren, führt naives "Einsetzen" wiederum zum unbestimmten Ausdruck $\frac{\infty}{\infty}$. Die Diskussion der rationalen Funktionen hat nun aber gezeigt, dass dieser Ausdruck als Grenzwert aufgefasst alles Mögliche sein kann, 0, eine endliche Zahl, aber auch ∞. Der Trick mit dem Kürzen funktioniert hier nicht mehr. Folgender Satz liefert aber das nötige Werkzeug, um solche Fälle zu untersuchen.

Satz 2 (Regel von de L'Hôpital)**.** *Seien $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, wobei $a, b \in [-\infty, \infty]$. Falls*

(i) $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$

oder

(ii) $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = \infty$ *(oder $-\infty$)*

und der Grenzwert $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert, so gilt

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Analoge Aussagen gelten für b.

Anschaulich ist es einleuchtend, dass diese beiden Grenzwerte übereinstimmen sollten. Denn *in der Nähe eines Punktes* wird die Funktion sehr gut durch ihre Tangente (oder eben die Ableitung) angenähert. Zoomt man lange genug hinein, ist der Unterschied von blossem Auge nicht mehr zu erkennen. Es ist daher naheliegend, dass das Verhältnis zweier Funktionen nahezu gleich dem Verhältnis ihrer Ableitungen ist – in der Nähe eines Punktes! Somit sind die beiden Grenzwerte, wie im obigen Satz formuliert, gleich. Vorsicht: Es handelt sich dabei aber nicht um die Ableitung des Bruches der beiden Funktionen.
Wir illustrieren nun das Vorgehen anhand zweier Beispiele.

Beispiel. Wir möchten $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x}$ berechnen. Sowohl Nenner wie auch Zähler konvergieren für $x \to \infty$ gegen unendlich. Formal erhalten wir $\frac{\infty}{\infty}$. Mit der Regel von de L'Hôpital folgern wir

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x}.$$

Dies ist formal immer noch ein Term der Form $\frac{\infty}{\infty}$. Wenden wir die Regel nochmals an, so ergibt dies

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

Beispiel. Hat $\frac{\cos(x)-1}{\sin(x)}$ in $x = 0$ eine Polstelle oder lässt sich die Funktion dort fortsetzen? Mit der Regel von de L'Hôpital berechnen wir

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = 0\,.$$

Also handelt es sich um keine Polstelle.

Mit der Regel von de l'Hôpital lassen sich die folgenden Grenzwerte bestimmen. Für jede positive Zahl $r > 0$ gelten:

$$\boxed{\begin{aligned} \lim_{x\to\infty} \frac{x^r}{e^x} &= 0 \\ \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x)}{x^r} &= 0 \end{aligned}}$$

In Worten bedeutet dies, dass die Exponentialfunktion schneller und die Logarithmusfunktion langsamer wächst als jede Potenzfunktion.

Zum Abschluss dieses Kapitels führen wir nochmals eine Kurvendiskussion durch, diesmal mit der Bestimmung des asymptotischen Verhaltens.

Beispiel. Diskutiere die Funktion

$$f(x) = \frac{x}{e^x}$$

auf ganz $\mathbb{R}$.

1. Da wir die Funktion auf ganz $\mathbb{R}$ betrachten, haben wir keine Funktionsgrenzen wo Extrema auftreten können.

2. Erste Ableitung $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 \cdot e^{-x} + x \cdot e^{-x} \cdot (-1) \\ &= \frac{1-x}{e^x} \end{aligned}$$

   Somit hat f' nur an der Stelle $x = 1$ eine Nullstelle.

3. Zweite Ableitung $f''(x)$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= -1 \cdot e^{-x} + (1-x) \cdot e^{-x} \cdot (-1) \\ &= \frac{-1-(1-x)}{e^x} = \frac{x-2}{e^x} \end{aligned}$$

   Somit ist $f''(1) = -\frac{1}{e^1} < 0$ und somit hat die Funktion in 1 ein Maximum.

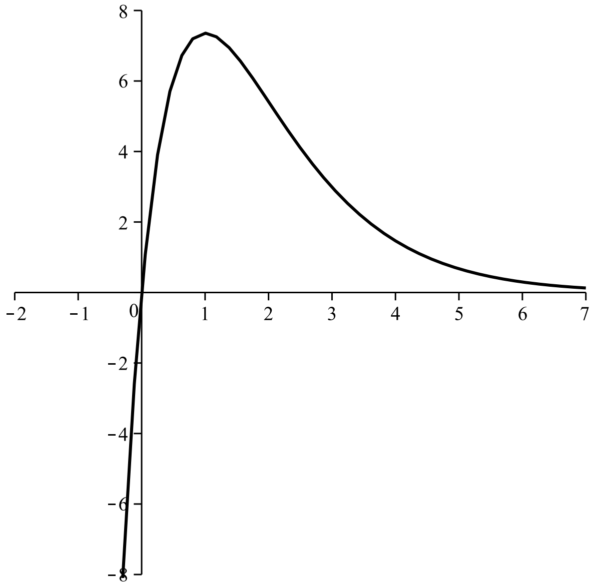
4. Die Funktion f hat in 1 ein absolutes Maximum (siehe asymptotisches Verhalten).

5. $f''(x) = 0$ hat die einzige Lösung $x = 2$. Da f'' dort das Vorzeichen wechselt, ist $x = 2$ ein Wendepunkt.

6. Es gelten

$$\begin{aligned} \lim_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} &= 0 \\ \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{e^x} &= -\infty \end{aligned}$$

   Der erste Grenzwert folgt mit der Regel von de L'Hôpital, der zweite, da der Zähler gegen $-\infty$ geht und der Nenner gegen 0, wobei der Nenner immer positiv ist.


8
6
4
2
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
7
−2
−4
−6
−8

2 Optimierungsprobleme

Im letzten Kapitel haben wir gesehen, wie man die Extremalwerte einer reellen Funktion berechnet. Der Nutzen wurde aber noch nicht so klar. Dieser Abschnitt ist deshalb den sogenannten *Optimierungsproblemen* gewidmet, deren Lösungen oft durch Ableiten der zu optimierenden Funktionen gefunden werden. Es wird hier also keine neue Theorie entwickelt, sondern nur an praktischen Beispielen gezeigt, was es bringt, Extremalwerte von Funktionen ausrechnen zu können. Ein klassisches Problem ist das folgende.

Beispiel. Eine Firma kauft von einem Produkt jeweils eine Menge x ein. Das Produkt wird dann kontinuierlich an die Kunden weiterverkauft, bis alles weg ist; erst dann wird die nächste Menge x eingekauft. Die Nachfrage nach diesem Produkt beträgt $N > 0$ pro Tag. Die Firma hat zwei Arten von Kosten zu beachten:

1. Es gibt Lagerungskosten pro Tag, die proportional zu x sind (also gleich Lx für ein gewisses $L \geq 0$).
2. Es gibt bei jedem Einkauf Einkaufskosten $E \geq 0$, die unabhängig von der Menge x sind.

Stellen wir zuerst einmal alle genannten Variablen zusammen:

Einkaufsmenge	x
Nachfrage pro Tag	N
Lagerungskosten pro Tag	Lx
Einkaufskosten pro Einkauf	E

Wenn man viel auf einmal einkauft (d.h. wenn man x gross wählt), so hat man geringe Einkaufskosten pro Tag, aber hohe Lagerungskosten; kauft man jeweils wenig auf einmal ein, so hat man geringe Lagerungskosten aber hohe Einkaufskosten. Wie gross muss die Firma x wählen, damit möglichst wenig Kosten pro Tag entstehen?

Wie bei allen Optimieringsproblemen, gibt es hier eine *Zielfunktion*, die Kosten K pro Tag, deren Minima/Maxima gefunden werden müssen. Dies unter gewissen Bedingungen für das Argument (hier $x > 0$).

Wie sieht unsere Funktion K denn überhaupt aus?

Nun, erstens hat man pro Tag Lx Lagerungskosten. Weiter kauft man alle $\frac{x}{N}$ Tage ein, und das kostet jeweils E, also sind die Einkaufskosten pro Tag genau

$$\frac{E}{\frac{x}{N}} = \frac{EN}{x}.$$

Die Kostenfunktion ist also

$$K(x) = Lx + \frac{EN}{x}, \quad x \in (0, \infty).$$

Um die Minima dieser Funktion zu bestimmen, bemerken wir, dass K differenzierbar ist mit Ableitung

$$K'(x) = L - \frac{EN}{x^2}.$$

Nun wissen wir aber, dass K auf $(0, \infty)$ genau dort ein Minimum hat, wo K' eine Nullstelle besitzt (es gibt keine Randwerte, in der Tat gilt $\lim_{x \to 0} K(x) = \lim_{x \to \infty} K(x) = \infty$). Die einzige Nullstelle von K' in $(0, \infty)$ ist

$$x_e = \sqrt{\frac{EN}{L}}.$$

Weiter berechnen wir die zweite Ableitung um sicher zu gehen, dass es auch wirklich ein Minimum ist:

$$K''(x) = -\frac{EN}{x^3} \cdot (-2) = \frac{2EN}{x^3}$$

und somit

$$K''\left(\sqrt{\frac{EN}{L}}\right) = \frac{2EN}{\left(\frac{EN}{L}\right)^{\frac{3}{2}}} > 0,$$

da E, N und L positiv sind. Somit haben wir in x_e tatsächlich ein Minimum. Man sollte also jeweils eine Menge von $\sqrt{\frac{EN}{L}}$ einkaufen, um die Kosten zu minimieren.

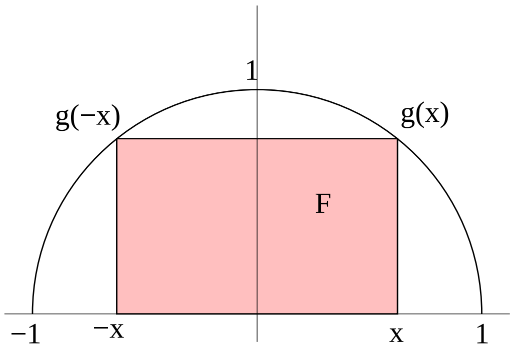
Bemerkung. Dies ist die Lösung eines *mathematischen* Problems. In der Anwendung (Wirtschafts- oder Naturwissenschaften) muss dem ein entscheidender Schritt vorgelagert sein, die mathematische Modellierung.

$$\boxed{\text{Realität}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{Modell}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{math. Untersuchung}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\text{Realität?}}$$

Nach der mathematischen Untersuchung muss man sich überlegen, was die Resultate über die Realität aussagen. Im obigen Beispiel kann man sich fragen, ob es ein gutes Modell ist, wenn man davon ausgeht, dass erst wieder eingekauft wird, wenn nichts mehr da ist. In der Regel muss das Modell die Realität vereinfachen (gewisse Faktoren vernachlässigen), und es ist eine zentrale Aufgabe, ein möglichst realitätsnahes und doch mathematisch behandelbares Modell zu finden.

Beispiel. Gegeben ist ein Halbkreis C mit Radius 1. Was ist die maximale Fläche eines Rechtecks, das ganz in C liegt und eine Seite auf dem Durchmesser von C hat?

Wir versuchen, das Problem auf ein Optimierungsproblem der oben stehenden Art zurückzuführen. Sei C der Halbkreis begrenzt durch den Graphen der Funktion $g : x \mapsto \sqrt{1-x^2},\ x \in [-1,1]$, und der x-Achse. Betrachte ein Rechteck R in C, dessen eine Seite auf der x-Achse liegt und dessen andere Punkte gerade den Kreis berühren (sonst ist die Fläche des Rechtecks nicht maximal).



Es ist einfach einzusehen, dass auf der x–Achse der Abstand von den Eckpunkten des Rechtecks zum Nullpunkt, rechts und links vom Nullpunkt übereinstimmen müssen, sonst ist die Fläche des Rechtecks erneut nicht maximal. Somit sind die Eckpunkte des Rechtecks $(x,0),(-x,0)$ sowie $(x,g(x))$ und $(-x,g(-x))$.

Die Fläche des zu x gehörenden Rechtecks ist gleich

$$F(x) := 2x \cdot g(x) = 2x\sqrt{1-x^2}, \quad \text{mit } x \in [0,1].$$

Wir müssen also das Maximum von F auf $[0,1]$ bestimmen. Nun ist F differenzierbar auf $(0,1)$ mit Ableitung

$$\begin{aligned} F'(x) &= 2\sqrt{1-x^2} + 2x \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) \cdot (-2x) \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}(1-x^2-x^2) = 2 \cdot \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

Setzen wir $F'(x) = 0$, so erhalten wir

$$2 \cdot \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad 1-2x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{1}{2}.$$

Die einzige Nullstelle von F' in $(0,1)$ ist somit $x_e = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Berechnen wir nun noch die zweite Ableitung

$$\begin{aligned}
F''(x) &= 2\cdot(-4x)\cdot(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} + 2(1-2x^2)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-2x)\\
&= \frac{-8x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{2x(1-2x^2)}{\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3}\\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot\left(-8x+\frac{2x-4x^3}{1-x^2}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(\frac{-8x+8x^3+2x-4x^3}{1-x^2}\right)\\
&= \frac{4x^3-6x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x(4x^2-6)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned}$$

Wir erhalten somit

$$F''\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot(4\cdot\frac{1}{2}-6)}{(1-\frac{1}{2})^{\frac{3}{2}}} < 0$$

und somit hat F in $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ein Maximum der Grösse

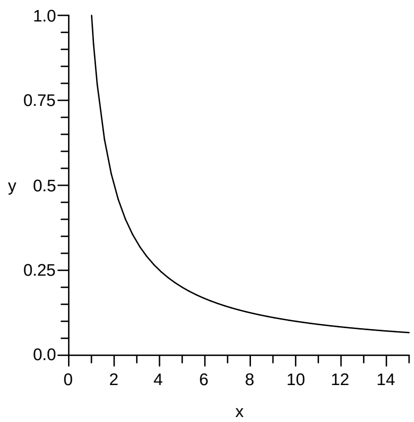
$$F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{2}} = 1.$$

Ein Vergleich mit den Werten $F(0)=0$ und $F(1)=0$ zeigt, dass dieses Maximum absolut ist.

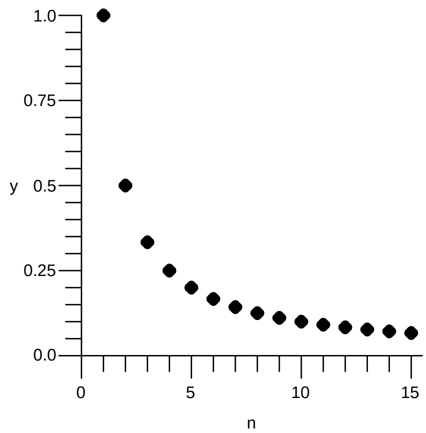
Bemerkung. In Optimierungsaufgaben muss jeweils eine Zielfunktion maximiert oder minimiert werden. Dies alleine wäre oft eine leichte Sache oder aber nicht lösbar, wäre da nicht auch noch eine Neben- oder Randbedingung. In der Tat, ein Rechteck mit maximalem Flächeninhalt gibt es nicht. Erst die zusätzliche Bedingung, dass es ganz in C liegen soll, macht es zu einem sinnvollen Problem. Ebenso sind die Kosten im ersten Beispiel am geringsten, wenn man gar nichts tut, nämlich 0. Erst die Bedingung, dass der Betrieb aufrecht erhalten werden soll, macht die Aufgabe zu einem ernsthaften Problem.
Oftmals ist die Nebenbedingung in der Zielfunktion bereits implizit enthalten (dies geschieht bei der Modellierung). Manchmal ist es aber auch hilfreich, zuerst die Zielfunktion und die Nebenbedingung einzeln aufzuschreiben. Bei diesem geometrischen Beispiel ist die eigentliche Zielfunktion die Fläche, also Länge mal Breite (2 Variablen). Mit der Nebenbedingung "liegt in C" können wir die Länge und die Breite zueinander in Beziehung setzen (1 Variable nach der anderen auflösen). So erhalten wir die Zielfunktion F (1 Variable) wie oben.

3 Folgen und Reihen

Bisher haben wir Funktionen untersucht, deren Definitionsbereich “kontinuierlich” ist, beispielsweise ein Intervall. Eine spezielle Klasse von Funktionen, deren Definitionsbereich “diskret” ist, nämlich $\mathbb{N}$, sind die Folgen (und Reihen). Diese haben eine grosse innermathematische Bedeutung. Andererseits sind sie auch in Anwendungen relevant, da Daten oftmals in Form diskreter (einzelner) Messungen vorliegen und nicht als kontinuierliche Aufzeichnung.



Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$



Folge $a_n = \frac{1}{n}$

3.1 Folgen

Definition 1. Eine *Folge* reeller Zahlen ist eine Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ n &\longmapsto a_n, \end{aligned}$$

so dass jeder Zahl n eine reelle Zahl a_n zugeordnet wird. Man schreibt hierfür $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(a_0, a_1, \ldots)$.

Bemerkung. Manchmal fängt die Folge auch erst bei a_1 statt a_0 an, oder bei einem beliebigen anderen Startpunkt.

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also eine Folge von Zahlen:

$$2, 4, 6, 8, 10, \dots \qquad \text{oder} \qquad 1, 3, 9, 27, 81, \dots.$$

Diese entsprechen den Abbildungen

$$\begin{array}{rcl} 0 & \mapsto & 2 \\ 1 & \mapsto & 4 \\ 2 & \mapsto & 6 \\ 3 & \mapsto & 8 \\ 4 & \mapsto & 10 \\ 5 & \mapsto & 12 \\ & \vdots & \end{array} \quad \text{respektive} \quad \begin{array}{rcl} 0 & \mapsto & 1 \\ 1 & \mapsto & 3 \\ 2 & \mapsto & 9 \\ 3 & \mapsto & 27 \\ 4 & \mapsto & 81 \\ 5 & \mapsto & 243 \\ & \vdots & \end{array}$$

Kurz beschreibt man eine Folge indem man das n-te Glied angibt. Es gibt zwei Möglichkeiten:

- *rekursiv*: a_n in Abhängigkeit von a_{n-1} (oder mehreren vorangehenden Gliedern), wobei ein Startwert a_0 gegeben ist (es sind so viele Startwerte anzugeben, wie viele Glieder in der Rekursionsformel vorkommen). Zum Beispiel

$$a_n = a_{n-1} + 2, \text{ wobei } a_0 = 2.$$

- *explizit*: a_n nur in Abhängigkeit von n. Zum Beispiel

$$a_n = 3^n.$$

Man nennt diese Abhängigkeiten auch *Bildungsgesetze*.

Betrachten wir noch ein paar weitere Beispiele.

Beispiel.

- Folge der Stammbrüche: $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots)$. Dies entspricht $a_n = \frac{1}{n}$ (erstes Folgeglied ist a_1).
- Alternierende Folge: $(1, -1,\ 1, -1,\ 1, -1,\ 1, -1, \ldots)$, entspricht der Folge $(-1)^n$.
- Folge der Primzahlen: $(2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots)$. Es ist kein Bildungsgesetz bekannt.
- Fibonacci-Zahlen: $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots)$. Wird beschrieben durch $a_0 = 1, a_1 = 1$ und $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ für $n \geq 2$.
- Arithmetische Folge: $(-2, 3, 8, 13, 18, \ldots)$, entspricht der Folge $a_n = 5n - 2$.
- Geometrische Folge: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots)$, entspricht der Folge $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Wir sehen bei diesen Beispielen, dass es ganz unterschiedliche Folgen gibt. Arithmetische, alternierende, geometrische... etc. Wir werden nun einige davon genauer betrachen.

Definition. Bei einer *arithmetischen Folge* sind die Abstände zwischen zwei aufeinanderfolgenden Gliedern immer konstant. Das heisst, es gibt eine Zahl $d \in \mathbb{R}$, so dass

$$\boxed{a_n - a_{n-1} = d \qquad \text{konstant für alle } n \in \mathbb{N}.}$$

Wir haben bereits zwei Beispiele dazu gesehen:

- $(2, 4, 6, 8, 10, \ldots)$ entspricht der Folge $a_n = a_{n-1} + 2$. Es gilt somit

  $$a_n - a_{n-1} = 2$$

  und der Abstand zwischen zwei Gliedern ist $d = 2$.

- $(-2, 3, 8, 13, 18, \ldots)$ entspricht der Folge $a_n = 5n - 2$. Es gilt

  $$a_n - a_{n-1} = 5n - 2 - (5(n-1) - 2) = 5n - 2 - 5n + 5 + 2 = 5,$$

  also ist in diesem Fall der Abstand zwischen zwei Gliedern $d = 5$.

Definition. Eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ heisst *geometrische Folge*, wenn der Quotient aus zwei aufeinanderfolgenden Gliedern stets konstant ist. Das heisst, es gibt eine Zahl $q \in \mathbb{R}$, so dass

$$\boxed{\frac{a_n}{a_{n-1}} = q \qquad \text{konstant für alle } n \in \mathbb{N}.}$$

Dies entspricht der rekursiven Formel

$$a_n = q \cdot a_{n-1}.$$

Will man ein explizites Bildungsgesetz, kann man aus

$$\begin{aligned}
a_1 &= q \cdot a_0, \\
a_2 &= q \cdot a_1 = q \cdot q \cdot a_0 = q^2 a_0, \\
a_3 &= q \cdot a_2 = q \cdot q^2 \cdot a_0 = q^3 \cdot a_0 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

folgern, dass

$$a_n = a_0 \cdot q^n$$

gilt.

Wir haben bereits zwei Beispiele von geometrischen Folgen kennengelernt:

- $(1{,}3{,}9{,}27{,}81, \ldots)$ entspricht der Folge $a_n = 3^n$ für $n \geq 0$. Es gilt

  $$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{3^n}{3^{n-1}} = 3,$$

  also ist $q = 3$.

- $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots)$ entspricht der Folge $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ für $n \geq 1$ und es gilt:

  $$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} = \frac{1}{2},$$

  und somit ist $q = \frac{1}{2}$.

3.2 Reihen

Wir summieren nun über die Folgeglieder, um eine Reihe zu bekommen.

Definition. Die *Summenfolge* ist ein Ausdruck bestehend aus endlich vielen Summanden

$$\boxed{s_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k}$$

und heisst *(endliche) Reihe*. Man nennt s_n auch n–te Partialsumme der Reihe.

Die Reihe kann sowohl beim Index $k = 0$ als auch beim Index $k = 1$ oder von einer beliebigen anderen Zahl aus beginnen.

Beispiel.

- $\sum\limits_{k=0}^{5} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{63}{32}$.
- $\sum\limits_{k=1}^{4} (-1)^k = (-1) + 1 + (-1) + 1 = 0$.

Es kann ziemlich schwierig sein, die Werte von Reihen zu berechnen. Manchmal kommt man aber mit Tricks zum Ziel, wie folgendes Beispiel zeigt: $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + n$

Angenommen, n sei gerade. Wir bilden Paare von Zahlen:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \text{mit} & n \\ 2 & \text{mit} & n-1 \\ 3 & \text{mit} & n-2 \\ & \vdots & \end{array}$$

Wenn wir jedes Paar zusammenzählen, bekommen wir immer $n + 1$. Weiter gibt es genau $\frac{n}{2}$ solche Paare (wir haben angenommen, dass n gerade ist). Somit bekommen wir

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ist n ungerade, dann betrachten wir $n - 1$, was ja nun gerade ist, und wenden obige Formel an. Wir erhalten

$$\sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n-1} k + n = \frac{(n-1)n}{2} + n = \frac{n^2 - n + 2n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Die Formel ist also für n gerade respektive n ungerade dieselbe.

Bei den Folgen haben wir die geometrische Folge kennengelernt. Entsprechend dazu nun bei den Reihen die *geometrische Reihe*:

Satz 3. *Ist $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ eine geometrische Folge, so gilt für die Summe der ersten n Glieder:*

$$\boxed{s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.}$$

Das s_n wird endliche geometrische Reihe *genannt.*

Hiermit lässt sich die Summe des ersten Beispiels auch direkt berechnen:

$$\sum_{i=0}^{5} \left(\frac{1}{2}\right)^i = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{64}}{\frac{1}{2}} = \frac{63}{32}.$$

Beweis des Satzes. Die Folge ist geometrisch, das heisst von der Form $a_n = a_0 \cdot q^n$. Wir betrachten folgende zwei Gleichungen:

$$\begin{array}{rcccl} s_n & = & a_0 & + & a_0 q + a_0 q^2 + \ldots + a_0 q^n \\ q \cdot s_n & = & & & a_0 q + a_0 q^2 + \ldots + a_0 q^n + a_0 q^{n+1} \end{array}$$

Berechnen wir nun die Differenz

$$s_n - q \cdot s_n = a_0 - a_0 q^{n+1}.$$

Dies entspricht

$$s_n(1 - q) = a_0(1 - q^{n+1}).$$

Somit erhalten wir unsere Behauptung

$$s_n = a_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

□

Was passiert, wenn wir nicht nur bis zu einem gewissen n sondern sogar bis unendlich aufsummieren?

Definition. Hat die Summe unendlich viele Summanden, wird sie *unendliche Reihe* genannt und man schreibt

$$s = \sum_{i=0}^{\infty} a_n.$$

Dies entspricht dem Grenzwert von s_n für $n \to \infty$,

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n,$$

und kann dementsprechend konvergent sein, was bedeutet, dass die Summe existiert, oder divergent sein. In diesem Falle existiert die Summe nicht. Der Umgang mit unendlichen Reihen ist eine heikle Angelegenheit und erfordert mehr mathematische Theorie.

Für uns relevant ist eine ganz spezielle Reihe, nämlich die *(unendliche) geometrische Reihe* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_0 \cdot q^n$. Hier ist die Untersuchung einfacher.

Satz 4. *Die geometrische Reihe* $(a_0,\ a_0q,\ a_0q^2, \ldots)$ *ist konvergent für* $|q| < 1$*:*

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} a_0 q^n = a_0(1 + q + q^2 + q^3 + \ldots) = a_0 \frac{1}{1-q}}$$

Für alle anderen q divergiert die Summe.

Bemerkung. Beachte, dass die Summe bei $n = 0$ anfängt.

Beweis des Satzes. Wir haben bereits s_n für eine geometrische Summe berechnet:

$$s_n = a_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Betrachten wir nun den Limes

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = a_0 \frac{1}{1-q},$$

da $\lim\limits_{n\to\infty} q^{n+1} = 0$ falls $|q| < 1$.

□

Beispiel.

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^i = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}.$$

Beispiel (zur Divergenz)**.** Es ist einfach zu sehen, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} n = 0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots$$

divergiert. Etwas schwieriger ist es zu zeigen, dass auch die harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

divergent ist (siehe Übungen).