DER TRANSFORMATIONSSATZ

ALBERTO S. CATTANEO

1. Einführung

In diesen Notizen werden wir den Transformationssatz beweisen und einige Folgerungen herleiten. Mit $\mathcal{L}^p$ bzw. λ_p (oder einfach λ) bezeichnen wir die Lebesgue-σ-Algebra bzw. das Lebesgue-Mass auf $\mathbb{R}^p$, s. Abschnitt 2. Ist $X \in \mathcal{L}^p$, so bezeichnet $\mathcal{L}^p_X := \{A \cap X,\ A \in \mathcal{L}^p\}$ die Einschränkung der Lebesgue-Algebra auf X.

Satz 1 (Transformationssatz)**.** *Seien X und Y offene Teilmengen von $\mathbb{R}^p$ und $T\colon X \to Y$ ein C^1-Diffeomorphismus.*

(1) $\forall A \in \mathcal{L}^p_X$ *gilt*

$$\lambda(T(A)) = \int_A |\det \mathrm{d}T| \,\mathrm{d}\lambda. \tag{1.1}$$

(2) $\forall f \in M^+(Y, \mathcal{L}^p_Y)$ *gilt*[1]

$$\boxed{\int_Y f \,\mathrm{d}\lambda = \int_X f \circ T \,|\det \mathrm{d}T| \,\mathrm{d}\lambda} \tag{1.2}$$

(3) $f\colon Y \to \mathbb{R}$ *ist genau dann Lebesgue-integrierbar über Y, wenn $f \circ T\ |\det \mathrm{d}T|$ Lebesgue-integrierbar über X ist. In diesem Falle gilt die Transformationsformel* (1.2)*.*

Man bemerke, dass (1) ein Spezialfall von (1.2) (für $f = \chi_{T(A)}$, denn $f \circ T = \chi_A$) ist.

Um den Beweis am einfachsten und am geometrischsten zu halten, werden wir verschieden Teile des Beweises aus verschiedenen Texten entnehmen: [A3, B, E, K2].

Am Schluss werden wir Beispiele von Anwendungen der Transformationsformel diskutieren: Polarkoordinaten, Integration rotationssymmetrischer Funktionen und Volumina von Kugeln.

Date: November 2010.

Florian Schätz hat mich in der Bearbeitung der deutschen Version unterstützt; ich danke ihm sehr.

[1] $M^+(Y, \mathcal{L}^p_Y)$ bezeichnet die Menge der nichtnegativen $\mathcal{L}^p_Y$-messbaren numerischen Funktionen auf Y.

Bemerkung 1. Wenn man nur Borel-Mengen betrachtet, ist der Beweis des Transformationssatzes ein etwas einfacher: In diesem Fall braucht man aus Abschnitt 3 nur Korollar 5.

2. Eigenschaften des Lebesgue-Masses

In diesem Abschnitt fassen wir die Eigenschaften des Lebesgue-Masses zusammen, die für den Beweis des Transformationssatzes wichtig sind.

Das Lebesgue-Mass auf $\mathbb{R}^n$ lässt sich entweder als Produktmass von Lebesgue-Massen auf $\mathbb{R}$ [B, 10] oder direkt durch die Erweiterungssätze von Carathéodory und von Hahn [B, 9] folgendermassen definieren [B, 11, 12, 13]: Das kartesische Produkt $\mathbb{I} = I_1 \times \cdots \times I_n$ von (nach links halb-offenen) Intervallen

$$I_i = (a_i, b_i],$$

nennt man n-dimensionales Intervall. Die Länge $\ell(\mathbb{I})$ von $\mathbb{I}$ ist das Produkt der Längen $l(I_1), \ldots, l(I_n)$ der Intervalle; d.h.

$$\ell(\mathbb{I}) := l(I_1) \cdots l(I_n),$$

wobei $l((a; b]) := b - a$. Zu bemerken ist, dass ℓ translationsinvariant ist:

$$\ell(\mathbb{I} + x) = \ell(\mathbb{I}), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Das äussere Mass einer Teilmenge E von $\mathbb{R}^n$ wird wie üblich als

$$m^*(E) := \inf_{\{\mathbb{I}_k : E \subset \bigcup_k \mathbb{I}_k\}} \sum_{k=1}^{\infty} \ell(\mathbb{I}_k)$$

definiert. Zu bemerken ist, dass m^* auch translationsinvariant ist [B, 12.6].

Ähnlich definiert man die σ-Algebra $\mathcal{L}^n$ der n-dimensionalen Lebesgue-messbaren Mengen (einfach Lebesgue-Mengen) durch die Carathéodory-Bedingung [B, 13]. Der Erweiterungssatz von Carathéodory versichert, dass m^* ein Mass λ auf $\mathcal{L}^n$ definiert. Dieses Mass ist nach Konstruktion translationsinvariant:

$$\boxed{\lambda(E + x) = \lambda(E), \quad \forall E \in \mathcal{L}^n, \forall x \in \mathbb{R}^n} \tag{2.1}$$

Da ℓ σ-endlich ist, versichert der Erweiterungssatz von Hahn, dass dieses Mass (das Lebesgue-Mass) eindeutig bestimmt ist. Die Eindeutigkeit impliziert auch, dass dieses Mass gleich zum Produkt von eindimensionalen Lebesgue-Massen ist. Es wird auch durch die Eigenschaft

$$\lambda(\mathbb{I}) = \ell(\mathbb{I})$$

für alle Intervalle $\mathbb{I}$ eindeutig charackterisiert [B, 13.8].

Wir werden das Lebesgue-Mass λ oft auf die σ-Unteralgebra $\mathcal{B}^n$ der n-dimensionalen Borel-Mengen einschränken. Das ist die durch alle offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ erzeugte σ-Algebra.

Die Translationsinvarianz charakterisiert (bis auf Normierung) das Lebesgue-Mass:

Satz 2. *Sei μ ein translationsinvariantes Mass auf $\mathcal{L}^p$ (oder $\mathcal{B}^p$) mit $\mu((0;1]^p) = 1$. Dann gilt $\mu = \lambda$.*

Beweis. [E, III.2.2] Seien $n_1, \dots, n_p$ positive ganze Zahlen. Wir zerlegen die l-te Kante von $(0;1]^p$ in n_l gleiche Teile. Damit wird $(0;1]^p$ in $n_1 n_2 \cdots n_p$ p-dimensionale Intervalle zerlegt, wovon jedes eine Translation von $\left(0; \frac{1}{n_1}\right] \times \cdots \times \left(0; \frac{1}{n_p}\right]$ ist. Wegen der Translationsinvarianz gilt dann

$$\mu((0;1]^p) = n_1 \cdots n_p \, \mu\left(\left(0; \frac{1}{n_1}\right] \times \cdots \times \left(0; \frac{1}{n_p}\right]\right).$$

Die Normierung impliziert, dass

$$\mu\left(\left(0; \frac{1}{n_1}\right] \times \cdots \times \left(0; \frac{1}{n_p}\right]\right) = \frac{1}{n_1 \cdots n_p}, \quad \forall n_1, \dots, n_p \in \mathbb{N}^*$$

gilt. Die Translationsinvarianz impliziert das, dass $\mu(\mathbb{I}) = \ell(\mathbb{I})$ für alle p-dimensionalen Intervalle mit rationalen Endpunkten gilt. Man sieht leicht, dass das genügt, um $\mu(\mathbb{I}) = \ell(\mathbb{I})$ für alle Intervalle zu garantieren. Wegen der obigen Charakterisierung [B, 13.8] des Lebesgue-Masses, gilt dann $\mu = \lambda$. $\square$

Korollar 3. *Sei μ ein translationsinvariantes Mass auf $\mathcal{L}^p$ (oder $\mathcal{B}^p$) mit $\mu((0;1]^p) = \alpha$, wobei $0 < \alpha < +\infty$. Dann gilt $\mu = \alpha\lambda$.*

Beweis. Man setze $\tilde{\mu} := \frac{1}{\alpha}\mu$. Wegen des Satzes gilt $\tilde{\mu} = \lambda$. $\square$

Für Beispiele von Lebesgue-und Borel-messbaren Mengen und Annäherungseigenschaften sei auf [B, 14, 15] verwiesen.

3. Diffeomorphismen und Messbarkeit

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, dass Diffeomorphismen messbare Mengen auf messbare Mengen abbilden. Das ist nötig, um den Transformationssatz zu formulieren. Im ganzen Abschnitt sind U und V offene Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ und T ist eine Abbildung von U nach V.

Wir beginnen mit Borel-Mengen:

Lemma 4. *Sei $B \subset V$ eine Borel-Menge und sei T stetig. Dann ist $T^{-1}(B)$ auch eine Borel-Menge.*

Beweis. Das ist eine direkte Folge von Übung 2O in [B, 2], da $\mathcal{B}^n$ die durch alle offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ erzeugte σ-Algebra ist. □

Korollar 5. *Sei $E \subset U$ eine Borel-Menge und T ein C^1-Diffeomorphismus. Dann ist $T(E)$ auch eine Borel-Menge.*

Beweis. T^{-1} ist stetig. □

Da Lebesgue-Mengen sich von Borel-Mengen durch Nullmengen unterscheiden, müssen wir zunächst die Eigenschaften von Nullmengen unter Abbildungen verstehen.

Lemma 6. *Ist $N \subset U$ eine Nullmenge und ist T Lipschitz-stetig, so ist $T(N)$ auch eine Nullmenge.*

Beweis. [K2, 9.2] Sei L die Lipschitz-Konstante von T bezüglich der Maximusumsnorm $||x||_\infty := \max\{x_1, \ldots, x_n\}$:

$$||T(x) - T(y)||_\infty \leq L||x - y||_\infty, \ \forall x, y \in U.$$

Sei W ein Würfel in U mit Kantenlänge K, also $\lambda(W) = K^n$. Dann gilt $||x-y||_\infty \leq K$ für alle $x, y \in W$. Es folgt, dass $||T(x)-T(y)||_\infty \leq LK$ für alle $x, y \in W$. Deshalb ist $T(W)$ in einem Würfel mit Kante der Länge $2LK$ enthalten, wie wir in Lemma 8 zeigen werden. Das zieht nach sich, dass $\lambda(T(W)) \leq (2L)^n \, \lambda(W)$ für alle Würfel W in U gilt.

Sei jetzt $\epsilon > 0$. Da N eine Nullmenge ist, gibt es Intervalle $\mathbb{I}_k$ mit $N \subset \bigcup_k \mathbb{I}_k \subset U$ und $\sum_k \lambda(\mathbb{I}_k) < \epsilon$. Dann gilt

$$\lambda(T(N)) \leq \lambda\left(T\left(\bigcup_k \mathbb{I}_k\right)\right) = \lambda\left(\bigcup_k T(\mathbb{I}_k)\right) \leq \sum_k \lambda(T(\mathbb{I}_k)).$$

Wenn alle $\mathbb{I}_k$ Würfel wären, dann würde $\lambda(T(\mathbb{I}_k)) \leq (2L)^n \, \lambda(\mathbb{I}_k)$ gelten und deshalb $\lambda(T(N)) \leq (2L)^n \sum_k \lambda(\mathbb{I}_K) < (2L)^n \epsilon$. Man kann das annehmen — wie wir im nächsten Paragraphen zeigen werden — und deshalb $\lambda(T(N)) < (2L)^n \epsilon$, $\forall \epsilon > 0$ herleiten, was $\lambda(T(N)) = 0$ nach sich zieht.

Um die letzte Annahme zu begründen, betrachte man zunächst ein Intervall $\mathbb{I}$. Sei W_1 der grösste in $\mathbb{I}$ enthaltene Würfel. Sei W_2 das grösste in $\mathbb{I} \setminus W_1$ enthalten Würfel, usw. Es gilt dann $\mathbb{I} = \bigcup_r W_r$ und $W_r \cap W_s = \emptyset$. Man wiederhole das für all die gegebenen $\mathbb{I}_k$, die N überdecken: $\mathbb{I}_k = \bigcup_r W_{kr}$ und $W_{kr} \cap W_{ks} = \emptyset$. Deshalb $N \subset \bigcup_{kr} W_{kr}$ und $\sum_{kr} \lambda(W_{kr}) = \sum \lambda(I_k) < \epsilon$. Man ersetze schliesslich die abzählbare Familie $\{\mathbb{I}_k\}$ mit der abzählbaren Familie $\{W_{kr}\}$ von Würfeln. □

Korollar 7. *Sei $N \subset U$ eine Nullmenge und sei T stetig differenzierbar. Dann ist auch $T(N)$ eine Nullmenge.*

Beweis. Man kann U mit abzählbar vielen kompakten Intervallen $\mathbb{I}_k$ überdecken, s. Lemma 7 in [K2, 7.6]. Die Einschränkung von T auf jedem $\mathbb{I}_k$ ist dann wegen des Schrankensatzes Lipschitz-stetig. Lemma 6 impliziert, dass $T(N \cap \mathbb{I}_k)$ eine Nullmenge $\forall k$ ist. Da $T(N) \subset \bigcup_k T(N \cap \mathbb{I}_k)$, erhalten wir $\lambda(T(N)) \leq \sum_k \lambda(T(N \cap \mathbb{I}_k)) = 0$. □

Zum Beweis von Lemma 6 fehlt noch folgendes

Lemma 8. *Sei Z eine Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ mit der Eigenschaft $||x - y||_\infty \leq R$, $\forall x, y \in Z$, für eine gewisse Konstante R. Dann ist Z in einem Würfel mit Kantenlänge $2R$ enthalten.*

Beweis. Ist Z leer, so ist die Aussage klar. Im anderen Falle zeigen wir sie wie folgt. Wir bezeichnen mit x_i, $i = 1, \dots, n$, die i-te Komponente von $x \in \mathbb{R}^n$. Die Bedingung impliziert $|x_i - y_i| \leq R$, $\forall i$. Sei $Z_i \subset \mathbb{R}$ das Bild von Z unter der Projektion nach der i-ten Achse. Die Bedingung ist jetzt $|x - y| \leq R \ \forall x, y \in Z_i$.

Zunächst zeigen wir, dass Z_i beschränkt ist: Wäre das nicht der Fall, so könnten wir für jedes $x \in Z_i$ ein $y \in Z_i$ mit $y > x + R$ oder $y < x - R$ finden und die Bedingung wäre verletzt. Seien dann α_i bzw. β_i das Infimum bzw. das Supremum von Z_i. Es gilt $\beta_i - x \leq R$ $\forall x \in Z_i$. Gäbe es nämlich ein $x \in Z_i$ mit $\beta_i - x > R$, so könnten wir ein β' mit $R + x < \beta' < \beta_i$ finden (z.B. $\beta' = (\beta_i + R + x)/2$); da β_i das Supremum ist, würde es dann ein $y \in Z_i$ mit $y \geq \beta'$ geben; das würde $|y - x| = y - x = (y - \beta') + (\beta' - x) \geq \beta' - x > R$ implizieren, was die Bedingung verletzt. Ähnlicherweise zeigt man $x - \alpha_i \leq R \ \forall x \in Z_i$. Die Dreiecksungleichung $|\beta_i - \alpha_i| \leq |\beta_i - x| + |x - \alpha_i|$ ergibt für $x \in Z_i$ die Ungleichnung $|\beta_i - \alpha_i| \leq 2R$. Es folgt dann, dass Z_i im Intervall $[\alpha_i; \gamma_i]$ mit $\gamma_i := \alpha_i + 2R$ enthalten ist. Wiederholen wir das für alle i, so sehen wir, dass Z im Würfel $[\alpha_1; \gamma_1] \times \cdots \times [\alpha_n; \gamma_n]$ enthalten ist. □

Wir kommen schliesslich zu den allgemeinen Resultaten für Lebesgue-Mengen:

Lemma 9. *Sei $E \subset U$ eine Lebesgue-Menge und sei T Lipschitz-stetig mit stetiger Umkehrabbildung. Dann ist $T(E)$ auch eine Lebesgue-Menge.*

Beweis. Nach Korollar 15.8 von [B, 15] gibt es eine F_σ- (deshalb Borel-)Menge K mit $\lambda(E \setminus K) = 0$. Nach Lemma 4 ist auch $T(K)$ eine Borel-Menge und nach Lemma 6 ist auch $T(E \setminus K)$ eine Nullmenge. Da $T(E) = T(K) \cup T(E \setminus K)$, ist auch $T(E)$ eine Lebesgue-Menge. □

Korollar 10. *Sei $E \subset U$ eine Lebesgue-Menge und T ein C^1-Diffeomorphismus. Dann ist $T(E)$ auch eine Lebesgue-Menge.*

Beweis. Das folgt direkt aus Korollar 7 und Lemma 9. □

4. Der spezielle Transformationssatz

Wir zeigen in diesem Abschnitt die erste Aussage des Transformationssatzes im Spezialfall, wenn die Abbildung T linear ist. Wir folgen hierbei [A3, IX.5].

Satz 11 (Der spezielle Transformationssatz)**.** *Sei $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Automorphismus. Dann gilt*

$$\lambda(T(A)) = |\det T|\,\lambda(A), \quad \forall A \in \mathcal{L}^n.$$

Man bemerke, dass die linke Seite dank Korollar 10 wohldefiniert ist, denn ein Automorphismus ist auch ein Diffeomorphismus. Zum Beweis definieren wir zunächst

$$\mu_T(A) := \lambda(T(A)).$$

Lemma 12. *μ_T ist ein translationsinvariantes Mass auf $\mathcal{L}^n$.*

Der Beweis ist sehr leicht und wird den Lesern überlassen. Wegen Korollar 3 gilt dann $\mu_T = \alpha_T\,\lambda$ mit $\alpha_T = \mu_T((0;1]^n)$. Um den Satz zu zeigen, brauchen wir nur

$$\alpha_T = |\det T| \tag{4.1}$$

zu verifizieren. Wir beginnen mit Elementarmatrizen.

4.1. **Permutationen.** Sei σ eine Permutation der Menge $\{1,\dots,n\}$ und T_σ der lineare Automorphismus mit $T_\sigma\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_{\sigma(i)}$ für alle Basisvektoren $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$. Die Spalten der darstellenden Matrix von T_σ sind die entsprechenden Permutation der Spalten der Einheitsmatrix. Deshalb gilt $|\det T_\sigma| = 1$. Auf der anderen Seite zeigt die explizite Formel $Tx = \sum_{i=1}^n x_{\sigma^{-1}(i)}\,\mathbf{e}_i$, dass $T_\sigma((0;1]^n) = (0;1]^n$ gilt und daher $\alpha_{T_\sigma} = 1$. Das zeigt Formel (4.1) und den speziellen Transformationssatz für alle T_σ.

4.2. **Skalierungen.** Für $t \neq 0$ sei $S(t)$ der Automorphismus, der durch $S(t)\mathbf{e}_1 = t\,\mathbf{e}_1$ und $S(t)\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i$ für $i \neq 1$ definiert wird. Die darstellende Matrix ist

$$S(t) = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots} \end{pmatrix}$$

und deshalb gilt $\det S(t) = t$. Auf der anderen Seite gilt $S(t)((0;1]^n) = (0;t] \times (0;1]^{n-1}$ für $t > 0$ und $S(t)((0;1]^n) = [t;0) \times (0;1]^{n-1}$ für $t < 0$. Auf jedem Fall gilt $\alpha_{S(t)} = |t|$, was Formel (4.1) und den speziellen Transformationssatz für Skalierungen zeigt.

4.3. **Verschiebungen.** Im Falle $n > 1$ sei Q der Automorphismus mit $Q\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ und $Q\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i$ für $i \neq 1$. Die darstellende Matrix ist

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots} \end{pmatrix}$$

und deshalb gilt $\det Q = 1$. Es gilt $Q((0;1]^n) = P \times (0;1]^{n-2}$ mit $P = Q_2((0;1] \times (0;1])$, wobei Q_2 der entsprechende Automorphismus von $\mathbb{R}^2$ ist (d.h.: $Q\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ und $Q\mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_2$). Bis auf einer Nullmenge ist P das Parallelogramm mit Eckpunkten $A = (0,0)$, $B = (1,1)$, $C = (1,2)$, $D = (0,1)$, d.h. die Vereinigung der Dreiecken ABD und DBC. Wegen

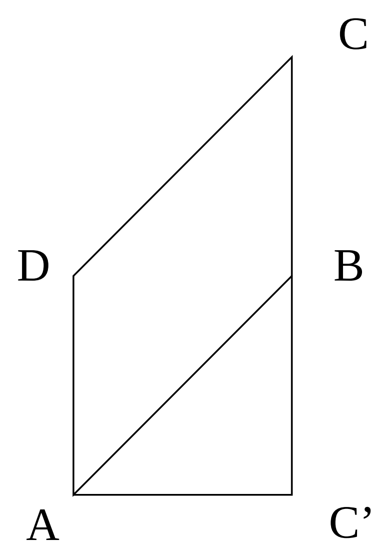

Abbildung 1. P

Translationsivarianz gilt $\lambda(DBC) = \lambda(AC'B)$ mit $C' = (1,0)$. Deshalb ist das 2-dimensionale Lebesgue-Mass $\lambda_2(P)$ von P gleich zum Mass der Vereinigung von ABD und $AC'B$, was das Quadrat $AC'BD$ ergibt. Das zeigt, dass $\lambda_2(P) = 1$ gilt. Da $\alpha_Q = \lambda_2(P)\,\lambda_{n-2}((0;1]^{n-2}) = 1$, haben wir Formel (4.1) und den speziellen Transformationssatz auch in diesem Falle bewiesen.

4.4. **Der allgemeine Fall.** Es ist ein Fundamentalergebnis der linearen Algebra, s. z.B. Satz 2.7.3 von [F, 2.3], dass Matrizen der Form T_σ, $S(t)$ und Q die ganze Gruppe der Automorphismen erzeugen (das ist nur eine andere Form des Gaussschen Eliminationsverfahren): d.h., jeder Automorphismus T lässt sich als endlicher Produkt $E_1 \cdots E_k$ von solchen Matrizen schreiben. Da wir den speziellen Transformationssatz für jede solche Matrix, und deshalb für jedes E_i in dieser Zerlegung, bereits bewiesen haben, gilt

$$\begin{aligned}\lambda(T(A)) &= \lambda(E_1\cdots E_k(A)) = \lambda(E_1(E_2\cdots E_k(A))) =\\ &= |\det E_1|\,\lambda(E_2\cdots E_k(A)) = |\det E_1|\,|\det E_2|\,\lambda(E_3\cdots E_k(A)) = \cdots =\\ &= |\det E_1|\cdots|\det E_k|\,\lambda(A) = |\det E_1\cdots E_k|\,\lambda(A) = |\det T|\,\lambda(A),\end{aligned}$$

was Formel (4.1) im allgemeinen Fall zeigt. Das beendet auch den Beweis des speziellen Transformationssatzes 11.

Korollar 13 (Bewegungsinsvarianz)**.** *Das Lebesgue-Mass ist bewegungsinvariant, d.h. $\lambda(T(A)) = \lambda(A)$ für jede Bewegung T. (Eine Bewegung von $\mathbb{R}^n$ ist eine affine Isometrie des euklidischen $\mathbb{R}^n$.)*

Beweis. Es ist aus der linearen Algebra bekannt, dass eine Bewegung T immer der Form $T(x) = Mx+a$ mit $M \in O(n)$ und $a \in \mathbb{R}^n$ ist. Deshalb gilt $\lambda(T(A)) = \lambda(M(A) + a) = \lambda(M(A)) = |\det M|\,\lambda(A) = \lambda(A)$, da orthogonale Transformationen Determinante gleich ± 1 haben.

□

5. Beweis des Transformationssatzes

Wir beginnen mit dem Beweis der ersten Aussage des Transformationssatzes im Falle der Borel-Algebra. Seien $\mathcal{B}^p_X := \{A \cap X,\ A \in \mathcal{B}^p\}$ und

$$\mathcal{H} := \{\emptyset\} \cup \Big\{(a_1; b_1] \times \cdots \times (a_p; b_p] \subset X \quad \text{mit } a_i \text{ und } b_i \text{ von der Form } \frac{\alpha}{2^k},\ \alpha \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Es ist klar, dass $\mathcal{H}$ die σ-Algebra $\mathcal{B}^p_X$ erzeugt. Zusätzlich gilt folgendes

Lemma 14.

$$\lambda(T(\mathbb{I})) \leq \int_{\mathbb{I}} |\det \mathrm{d}T|\,\mathrm{d}\lambda, \quad \forall \mathbb{I} \in \mathcal{H}.$$

Die Idee des Beweises ist einfach: Man zerlegt $\mathbb{I}$ in der disjunkten Vereingung von kleinen Würfeln und verwendet den Mittelwertsatz, um die Einschränkung von T auf jedem Würfel linear zu approximieren. Bis auf einem kleinen Fehler gilt die Formel auf einem solchen Würfel dank des speziellen Transformationssatzes 11. Man kann zeigen, dass dies eine Approximation von oben ist. Der Grenzwert, den man erhält, wenn die Kantenlänge der Würfel gegen Null geht, ist durch das Integral auf der rechten Seiten der Formel oben abgeschätzt. Für die Details beziehen wir uns auf [E, V.4].

Lemma 15.

$$\lambda(T(A)) \leq \int_A |\det \mathrm{d}T| \,\mathrm{d}\lambda, \quad \forall A \in \mathcal{B}_X^p.$$

Zu bemerken ist, dass das noch nicht Aussage (1) des Transformationssatzes ist, denn wir haben eine Ungleichung statt einer Gleichheit.

Beweis. Seien $\mu_T^1(A) := \lambda(T(A))$ und $\mu_T^2(A) := \int_A |\det \mathrm{d}T| \,\mathrm{d}\lambda$. Sie sind Masse auf $\mathcal{B}_X^p$. Seien m_T^1 bzw. m_T^2 die Einschränkungen von μ_T^1 bzw. μ_T^2 auf $\mathcal{H}$. Da sie σ-endliche Masse auf $\mathcal{H}$ sind, impliziert der Erweiterungssatz von Hahn, dass μ_T^1 bzw. μ_T^2 gleich zur Einschränkung auf $\mathcal{B}_X^p$ der äusseren Masse m_T^{1*} bzw. m_T^{2*} sind. Nach Lemma 14 gilt $m_T^1 \leq m_T^2$, was $m_T^{1*} \leq m_T^{2*}$ nach sich zieht. □

Jetzt kommen wir zur Ungleichungsversion der zweiten Aussage des Transformationssatzes im Falle der Borel-Algebra.

Lemma 16. $\forall f \in M^+(Y, \mathcal{B}_Y^p)$ *gilt*

$$\int_Y f \,\mathrm{d}\lambda \leq \int_X f \circ T \,|\det \mathrm{d}T| \,\mathrm{d}\lambda.$$

Beweis. Für $f = \chi_A$ ist das einfach Lemma 15. Wegen der Linearität des Integrals, gilt dann die Ungleichung für alle einfachen messbaren nichtnegativen Funktionen. Der Approximationssatz (Lemma 2.11 in [B, 2]) impliziert den allgemeinen Fall. □

Aussage (2) des Transformationssatzes im Falle von $\mathcal{B}_Y^p$ folgt jetzt durch den Vertausch der Rollen von X und Y. Sei nämlich $g := f \circ T \,|\det \mathrm{d}T|$. Wenn $f \in M^+(Y, \mathcal{B}_Y^p)$ ist, so ist $g \in M^+(X, \mathcal{B}_X^p)$, da T ein Diffeomorphismus ist (es wäre hier ausreichend, einen Homöomorphismus zu haben). Schliesslich ist $T^{-1} \colon Y \to X$ auch ein Diffeomorphismus. Deshalb können wir Lemma 15 verwenden:

$$\int_X g \,\mathrm{d}\lambda \leq \int_Y g \circ T^{-1} \,|\det \mathrm{d}T^{-1}| \,\mathrm{d}\lambda.$$

Die linke Seite ist aber $\int_X f \circ T \,|\det \mathrm{d}T| \,\mathrm{d}\lambda$, während die rechte Seite $\int_Y f \,\mathrm{d}\lambda$ ist, da $\mathrm{d}T^{-1} = (\mathrm{d}T)^{-1}$. Damit haben wir die umgekehrte Ungleichung bewiesen und deshalb auch Aussage (2).

Aussage (1) folgt aus Aussage (2) für $f = \chi_{T(A)}$ und Aussage (3) zeigt man, indem man Aussage (2) auf den positiven und negativen Teil von f anwendet.

Die Verallgemeinerung zu ganz $\mathcal{L}_X^p$ ist sehr einfach. Nach Korollar 15.8 von [B, 15] lässt sich jede Lebesgue-Menge A als disjunkte Vereinigung einer Borel-Menge B und einer Nullmenge N schreiben. Aussage

(1) folgt dann aus folgender Berechnung:

$$\lambda(T(A)) = \lambda(T(B)) + \lambda(T(N)) = \lambda(T(B)) = \\ = \int_B |\det \mathrm{d}T|\,\mathrm{d}\lambda = \int_A |\det \mathrm{d}T|\,\mathrm{d}\lambda,$$

wobei die zweite Gleichheit aus Korollar 7 und die letzte aus dem Verschwinden von Integralen über Nullmengen folgt. Aussagen (2) und (3) zeigt man jetzt wieder wie oben.

6. Beispiele und Anwendungen

In diesem Abschnitt betrachten wir einige wichtige Anwendungen des Transformationssatzes für Integrale. Wir werden insbesonders Gaussche Integrale und Volumina von Kugeln berechnen. Im ganzen Abschnitt bezeichnet $\|\ \|$ die Euklidische Norm.

Als erste Anwendung berechnen wir zwei-dimensionale Integrale in Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} x &= r\,\cos\theta, \\ y &= r\,\sin\theta. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Um das als Diffeomorphismus zu betrachten, sollen wir den Definitionsbereich und den Wertevorrat gut wählen. Zum Beispiel können wir die Polarkkordinatenabbildung folgendermassen definieren:

$$\begin{array}{cccc} P_2\colon & \mathbb{R}_{>0} \times (-\pi;\pi) & \to & \mathbb{R}^2 \setminus N \\ & (r,\theta) & \mapsto & (r\,\cos\theta,\ r\,\sin\theta) \end{array} \tag{6.2}$$

wobei N die Nullmenge $\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0\}$ ist. Das Differential von P_2 ist

$$\mathrm{d}P_2 = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\sin\theta \\ \sin\theta & r\,\cos\theta \end{pmatrix}$$

und ihre Determinante ist $\det \mathrm{d}P_2 = r$. Wollen wir das Integral einer Funktion f auf $\mathbb{R}^2$ berechnen, so vernachlässigen wir zunächst die Nullmenge N und verwenden dann den Transformationssatz:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}_{>0}\times(-\pi;\pi)} f(r\,\cos\theta,\ r\,\sin\theta)\,r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$

Man kann sich das mit Hilfe der Rechenregel

$$\boxed{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta}$$

merken. Wenn wir über eine messbare Teilmenge E integrieren wollen, genügt es die Funktion $f\,\chi_E$ zu betrachten.

Im Speziallfall, wenn die Funktion f von x und y nur durch den Betrag abhängt, d.h. wenn es eine Funktion F auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $f(x,y) =$

$F(||x||)$ gibt, kann man (durch den Satz von Fubini) das Integral bez. θ leicht berechnen. Man bekommt dann das Lemma:

Lemma 17. *Sei F messbar auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Die Funktion $f(x,y) = F(||x||)$ ist genau dann integrierbar auf $\mathbb{R}^2$, wenn die Funktion $G(r) := r\,F(r)$ integrierbar auf $\mathbb{R}_{>0}$ ist. In diesem Fall gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\pi \int_0^{+\infty} F(r)\,r\,\mathrm{d}r.$$

Als Beispiel betrachten wir die zwei-dimensionale Gausssche Funktion $f(x,y) = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$. Wegen des Lemmas haben wir

$$I_2 := \int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} = 2\pi \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-r^2}\,r\,\mathrm{d}r = -\pi[\mathrm{e}^{-r^2}]_0^{+\infty} = \pi.$$

Es folgt:

Korollar 18. *Sei*

$$I_n := \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-||x||^2}\,\mathrm{d}^n x$$

das n-dimensionale Gausssche Integral. Dann gilt

$$I_n = \pi^{\frac{n}{2}}. \tag{6.3}$$

Insbesonders hat man für $n = 1$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}}$$

Beweis. Wir können $f(x) = \mathrm{e}^{-x_1^2}\,\mathrm{e}^{-x_2^2}\cdots\mathrm{e}^{-x_n^2}$ schreiben. Wegen des Satzes von Fubini gilt

$$I_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x_1^2}\,\mathrm{d}x_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x_2^2}\,\mathrm{d}x_2 \;\cdots \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x_n^2}\,\mathrm{d}x_n = (I_1)^n.$$

Inbesonders gilt $(I_1)^2 = I_2 = \pi$. □

Korollar 19. *Sei B eine symmetrische, positiv definite Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$. Dann gilt*

$$\boxed{\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-B(x,x)}\,\mathrm{d}^n x = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{\det B}}}$$

Beweis. Sei B die darstellende Matrix von B bez. der Standardbasis: $B(x,x) = x^T\,\mathsf{B}x$. Da B symmetrisch ist, ist sie diagonalisierbar: d.h. es gibt eine invertierbare Matrix S mit $\mathsf{B} = \mathsf{S}^{-1}\,\mathsf{D}\,\mathsf{S}$, wobei D eine Diagonalmatrix mit Einträgen auf der Diagonale gleich zu den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ von B ist. Da B positiv definit ist, gilt $\lambda_i > 0\ \forall i$. Sei jetzt R die Diagonalmatrix mit Einträgen auf der Diagonale gleich zu $\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}$. Es folgt $\mathsf{D} = \mathsf{R}^2$. Sei schliesslich $\mathsf{A} = \mathsf{S}^{-1}\,\mathsf{R}\,\mathsf{S}$ und daher $\mathsf{B} = \mathsf{A}^2$. Da A auch symmetrisch ist, gilt dann $B(x,x) = (\mathsf{A}x)^T(\mathsf{A}x)$. Wir verwenden jetzt den Transformationssatz bez. der Abbildung $x \mapsto \mathsf{A}x$ und erhalten

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-B(x,x)}\, \mathrm{d}^n x = \frac{1}{|\det \mathsf{A}|} I_n.$$

Formel (6.3) und $\det \mathsf{B} = (\det \mathsf{A})^2$ beschliessen den Beweis. □

6.1. **Integrale rotationssymmetrischer Funktionen und Volumina von Kugeln.** Eine Funktion f auf $\mathbb{R}^n$ heisst rotationssymmetrisch, wenn $f(Mx) = f(x)\ \forall M \in SO(n)$ und $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Lemma 20. *Eine Funktion f is genau dann rotationssymmetrisch, wenn es eine Funktion F auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ gibt mit $f(x) = F(||x||)$.*

Beweis. Es ist klar, dass $F(||x||)$ rotationssymmetrisch ist. Für die andere Implikation definieren wir $F(r) := f(r, 0, \dots, 0)$. Da für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ ein $M \in SO(n)$ mit $Mx = (||x||, 0, \dots, 0)^T$ existiert, haben wir $f(x) = f(Mx) = F(||x||)$. Um diese Aussage aus der linearen Algebra zu zeigen, bemerkt man einfach, dass M genau dann in $SO(n)$ ist, wenn ihre Zeilen (oder ihre Spalten) eine orthonormale Basis sind. Sei $v := x/||x||$ (der Fall $x = 0$ ist trivial) und sei $v_1, \dots v_n$ eine orthonormale Basis mit $v_1 = v$. Sei K die orthonormale Matrix mit Spalten $v_1, \dots v_n$. Dann gilt $K\mathbf{e}_1 = v$ und $M = K^T$ ist die gesuchte Matrix. □

Zur Berechnung des Integrals einer rotationssymmetrischen Funktion sind die Polarkoordinaten am besten geeignet. Ein Punkt $x \in \mathbb{R}^n$ wird durch eine Radialkoordinate $r = ||x||$ und $n-1$ Winkelkoordinaten $\phi_1, \dots, \phi_{n-1}$ beschrieben, die induktiv folgendermassen definiert werden können. Der Winkel $\phi_{n-1} \in [-\pi/2; \pi/2]$ wird durch die Gleichung $x_n = r\, \sin\phi_{n-1}$ bestimmt. Dann findet man die Winkelkoordinaten von

$$(x_1, \dots, x_{n-1}, 0) \cdot \cos\phi_{n-1}$$

als Element von $\mathbb{R}^{n-1}$ indem man dieses Verfahren bis zum zwei-dimensionalen Fall (6.1) wiederholt. Zum Beispiel hat man für $n = 3$:

$$\begin{aligned} x_1 &= r\, \cos\phi_1 \cos\phi_2, \\ x_2 &= r\, \sin\phi_1 \cos\phi_2 \\ x_3 &= r\, \sin\phi_2 \end{aligned} \tag{6.4}$$

Die Polarkoordinatenabbildung wollen wir als Diffeomorphismus defnieren. Wir müssen deshalb Definitionsbereich und Wertevorrat richtig wählen:

$$P_n\colon \mathbb{R}_{<0} \times (-\pi;\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)^{n-2} \to \mathbb{R}^n \setminus N_n,$$
$$P_n(r,\phi_1,\dots,\phi_{n-1}) = (P_{n-1}(r,\phi_1,\dots,\phi_{n-2})\cos\phi_{n-1},\ r\ \sin\phi_{n-1}),$$

wobei N_n die Nullmenge $\{(x_1,0)\in\mathbb{R}^2 : x_1 \leq 0\}\times\mathbb{R}^{n-2}$ ist. Man bemerke, dass der erste Winkel zwichen $-\pi$ und π liegt, während die anderen zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ liegen. Man kann explizit

$$\det \mathrm{d}P_n = r^{n-1}\prod_{k=2}^{n-1}\cos^{k-1}\phi_k$$

berechnen, s. z.B. Beispiel 3 von [K2, 3.1]. Diese Berechnung brauchen wir nicht. Es genügt folgendes

Lemma 21. *Es gibt eine Funktion ω_{n-1} s.d.*

$$\det \mathrm{d}P_n = r^{n-1}\omega_{n-1}(\phi_1,\dots,\phi_{n-1}).$$

Beweis. Man kann durch Induktion leicht zeigen, dass P_n homogen vom Grad 1 in r ist: d.h., $P_n(r,\phi_1,\dots,\phi_{n-1})$ ist von der Form $r\,p_n(\phi_1,\dots,\phi_{n-1})$ für eine gewisse Abbildung p_n, die nur von den Winkeln abhängt. Die erste Spalte von $\mathrm{d}P_n$ (d.h. die Ableitungen nach r) ist von r unabhängig, währen jede andere Spalte proportional zu r ist. Die Formel folgt dann aus der Multilinearität der Determinante. □

Sei

$$\Omega_{n-1} := \int_{(-\pi;\pi)\times\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)^{n-2}} \omega_{n-1}\mathrm{d}\phi_1\dots\mathrm{d}\phi_{n-1}.$$

Aus der Transformationssatz folgt

Satz 22. *Sei F messbar auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$. Die Funktion $f(x) = F(||x||)$ ist genau dann integrierbar auf $\mathbb{R}^n$, wenn die Funktion $G(r) := r^{n-1}F(r)$ integrierbar auf $\mathbb{R}_{>0}$ ist. In diesem Falle gilt*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}^n x = \Omega_{n-1}\int_0^{+\infty} F(r)\,r^{n-1}\,\mathrm{d}r.$$

Bemerkung 2. Der Satz gilt auch für $n=1$, wenn wir $\Omega_0 = 2$ setzen.

Bemerkung 3. Sei $f = \chi_{K_R^n}$, wobei $K_R^n = \{x\in\mathbb{R}^n : ||x|| < R\}$ die n-dimensionale Kugel mit Radius R ist. Es gilt dann $F = \chi_{[0;R)}$ und deshalb

$$\int_{K_R^n}\mathrm{d}^n x = \Omega_{n-1}\int_0^R r^{n-1}\,\mathrm{d}r.$$

Das heisst, das Volumen der n-dimensionalen Kugel mit Radius R ist

$$\mathrm{Vol}(K_R^n) = \frac{\Omega_{n-1}}{n}\, R^n. \tag{6.5}$$

Bemerkung 4. Geometrisch können wir das Volumen der $(n-1)$-dimensionalen Sphäre mit Radius R, $S_R^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : ||x|| = R\}$, als

$$\mathrm{Vol}(S_R^{n-1}) := \Omega_{n-1}\, R^{n-1}$$

verstehen. Das ist nicht das Lebesgue-Mass von S_R^{n-1} in $\mathbb{R}^n$, wo sie eine Nullmenge ist. Wenn wir die Sphäre als Rand der Kugel betrachten, haben wir die einprägsame Formel

$$\boxed{\mathrm{Vol}(\partial K_R^n) = \partial\, \mathrm{Vol}(K_R^n)} \tag{6.6}$$

wobei ∂ auf der rechten Seite die Ableitung nach R bezeichnet.

Man kann Ω_n explizit berechen:

Satz 23. *Es gilt*

$$\Omega_{2s} = \frac{2^{s+1}\pi^s}{(2s-1)!!}, \tag{6.7}$$

$$\Omega_{2s-1} = \frac{2\pi^s}{(s-1)!}, \tag{6.8}$$

wobei $(2s-1)!! := (2s-1)(2s-3)\dots 5\cdot 3\cdot 1$.

Wir werden diesen Satz in Abschnitt 6.2 zeigen. Aus den Bemerkungen folgern wir dann:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Vol}(S_R^{2s}) &= \frac{2^{s+1}\pi^s}{(2s-1)!!}\, R^{2s},\\
\mathrm{Vol}(S_R^{2s-1}) &= \frac{2\pi^s}{(s-1)!}\, R^{2s-1},\\
\mathrm{Vol}(K_R^{2s+1}) &= \frac{2^{s+1}\pi^s}{(2s-1)!!}\, R^{2s+1},\\
\mathrm{Vol}(K_R^{2s}) &= \frac{\pi^s}{s!}\, R^{2s}.
\end{aligned}$$

Die ersten Fälle listen wir in der untenstehenden Tabelle auf:

$n =$	$\mathrm{Vol}(S_R^{n-1})$	$\mathrm{Vol}(K_R^n)$
1	2	$2R$
2	$2\pi R$	πR^2
3	$4\pi R^2$	$\frac{4}{3}\pi R^3$
4	$2\pi^2 R^3$	$\frac{\pi^2}{2} R^4$

6.2. **Beweis von Satz 23.** Da die Gaussschen Funktionen rotationssymmetrisch sind, können wir die Gausschen Integrale in Polarkoordinaten berechen:

$$I_n = \Omega_{n-1} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-r^2}\, r^{n-1} \mathrm{d}r = \frac{1}{2}\Omega_{n-1} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{\frac{n}{2}-1}\, \mathrm{d}t,$$

wobei wir die Substitution $r = \sqrt{t}$ benützt haben. Damit haben wir

$$I_n = \frac{1}{2}\Omega_{n-1}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right),$$

wobei

$$\boxed{\Gamma(s) := \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^{s-1}\, \mathrm{d}t}$$

die Eulersche Gamma-Funktion ist, die für alle $s \in \mathbb{R}_{>0}$ definiert ist. Da $I_n = \pi^{\frac{n}{2}}$ wegen (6.3), haben wir

$$\boxed{\Omega_{n-1} = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}} \tag{6.9}$$

Die Eulersche Gamma-Funktion besitzt die Eigenschaft

$$\boxed{\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s), \quad \forall s \in \mathbb{R}_{>0}}$$

die aus partieller Integration folgt:

$$\begin{aligned}\Gamma(s+1) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, t^s\, \mathrm{d}t = -\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{d}t}\, t^s\, \mathrm{d}t =\\ = -[e^{-t}t^s]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\, st^{s-1}\, \mathrm{d}t = 0 + s\,\Gamma(s).\end{aligned}$$

Zusätzlich kann man $\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t} = 1$ leicht berechnen. Durch Induktion folgt

$$\boxed{\Gamma(s) = (s-1)!, \quad \forall s \in \mathbb{N}_{>0}}$$

was zeigt, dass die Gamma-Funktion eine Erweiterung der Fakultät ist. Damit könnnen wir (6.8) berechnen. Für (6.7) müssen wir Γ einer halbzahligen Zahl berechnen. Durch Indunktion zeigt man leicht

$$\Gamma\left(\frac{2s+1}{2}\right) = \frac{(2s-1)!!}{2^s}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \quad \forall s \in \mathbb{N}.$$

Man kann $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ direkt berechnen, aber wir verwenden den folgenden einfachen Trick: Für $n = 1$ ergibt (6.9)

$$\Omega_0 = \frac{2\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}.$$

Auf der anderen Seite gilt $\Omega_0 = 2$ aus Bemerkung 2. Deshalb

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

und

$$\boxed{\Gamma\left(\frac{2s+1}{2}\right) = \frac{(2s-1)!!}{2^s}\sqrt{\pi}, \quad \forall s \in \mathbb{N}}$$

und der Satz ist bewiesen.

7. Der Satz von Sard

Wie im Falle der Polarkoordinaten steht oft eine angebrachte Variablensubstitution zur Verfügung, die aber kein Diffeomorphismus auf dem ganzen Integrationsbreich ist. Zwecks Integration knn man aber Nullmengen auslassen. Sehr hilfreich ist dann der

Satz 24 (Satz von Sard)**.** *Seien $X \subset \mathbb{R}^p$ offen, $T\colon X \to \mathbb{R}^p$ stetig differenzierbar und*

$$C := \{x \in X : \operatorname{Rang} \mathrm{d}T(x) < p\}$$

die Menge der kritischen Punkte von T. Dann ist $T(C)$ eine Borel-Nullmenge.

Zum Beweis weisen wir auf [E, V.4.2] hin. Die Idee ist X durch Würfel W von innen anzunähern und zu zeigen, dass $T(C \cap W)$ eine Borel-Nullmenge ist. Das zeigt man, indem man W in kleinen disjunkten Teilwürfeln zerlegt und den Mittelwertsatz da anwendet.

Korollar 25. *Seien X, T, C wie im Satz von Sard. Ist $T|_{X\setminus C}$ injektiv, so ist jede Funktion f auf $T(X)$ genau dann Lebesgue-integrierbar über $T(X)$, wenn $f \circ T\,|\det \mathrm{d}T|$ Lebesgue-integrierbar über X ist. In diesem Falle gilt die Transformationsformel*

$$\int_{T(X)} f \,\mathrm{d}\lambda = \int_X f \circ T\,|\det \mathrm{d}T|\,\mathrm{d}\lambda.$$

Beweis. Wir zerlegen $X = X \setminus C \cup C$. Zu bemerken ist, dass C als abgeschlossene Teilmenge von X Borelsch ist, und deshalb ist $X \setminus C$ auch so. Nach dem Satz von Sard ist $T(C)$ Borelsch[2] und deshalb ist

[2] Das ist eigentlich eine einfache Bemerkung. Nämlich können wir X, oder eigentlich ganz $\mathbb{R}^p$, durch abzählbar viele beschränkte Bälle B_i überdecken. Dann ist $C_i := C \cap B_i$, als abgeschlossene und beschränkte Teilmenge, kompakt in X. Da T stetig ist, ist dann $T(C_i)$ auch kompakt und deshalb Borelsch.

auch $T(X \setminus C)$ so. Das Korollar folgt dann aus der Addition folgender Formeln:

$$\int_{T(C)} f \, \mathrm{d}\lambda = \int_C f \circ T \, |\det \mathrm{d}T| \, \mathrm{d}\lambda,$$
$$\int_{T(X\setminus C)} f \, \mathrm{d}\lambda = \int_{X\setminus C} f \circ T \, |\det \mathrm{d}T| \, \mathrm{d}\lambda.$$

Die erste Gleichung ist eigentlich trivial, denn beide Seiten sind gleich Null: die linke, da $T(C)$ nach dem Satz von Sard eine Nullmenge ist, die rechte, da $\det \mathrm{d}T$ auf C definitionsgemäss verschwindet. Die zweite Gleichung ist der Transformationssatz nach der Bemerkung, dass $T|_{X\setminus C} \colon X \setminus C \to T(X \setminus C)$ ein Diffeomorphismus ist. □

8. Der Satz von Radon–Nikodým

Die Transformationsformel kann in irgendeinem Sinn zu anderen Massen verallgemeinert werden. In diesem Abschnitt fassen wir einige Resultate zusammen, die man z.B. in [B, 8] finden kann. Wir brauchen zunächst folgende

Definition 1. Seien τ und μ Masse auf dem gleichen messbaren Raum $(X, \mathbb{X})$.

(1) Man sagt, τ sei absolut stetig bez. μ, und man schreibt

$$\tau \ll \mu,$$

falls für alle $E \in \mathbb{X}$ aus $\mu(E) = 0$ $\tau(E) = 0$ folgt.

(2) Man sagt, τ und μ seien zueinander singulär, und man schreibt

$$\tau \perp \mu,$$

falls es eine Zerlegung $X = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, $A, B \in \mathbb{X}$, gibt mit $\tau(A) = \lambda(B) = 0$.

Satz 26 (Zerlegungssatz von Lebesgue)**.** *Seien τ und μ σ-endliche Masse auf dem gleichen messbaren Raum. Dannn gibt es einedutig bestimmte Masse τ_1 und τ_2 s.d.:*

(1) $\tau = \tau_1 + \tau_2$,
(2) $\tau_1 \perp \mu$,
(3) $\tau_2 \ll \mu$.

Der Fall von absolut stetigen Massen lässt sich sehr gut wie folgt beschreiben:

Satz 27 (Satz von Radon–Nikodým)**.** *Seien τ und μ σ-endliche Masse auf dem gleichen messbaren Raum $(X, \mathbb{X})$. Gilt $\tau \ll \mu$, so gibt es eine numerische Funktion $f \in M^+(X, \mathbb{X})$ s.d.*

$$\tau(E) = \int_E f \, \mathrm{d}\mu. \tag{8.1}$$

Die Funktion f is μ-f.ü. eindeutig bestimmt (d.h., die Differenz zweier Funktionen, die (8.1) *erfüllen, verschwindet im Komplement einer μ-Nullmenge).*

Bemerkung 5. Die Funktion (oder, besser gesagt, ihre Äquivalenzklasse bis auf Addition μ-messabarer numerischer Funktionen, die μ-f.ü. verschwinden) heisst die Radon–Nikodým-Ableitung von τ nach μ und wird mit $\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\mu}$ bezechnet. Formel (8.1) wird dann normalerweise wie folgt geschrieben:

$$\boxed{\tau(E) = \int_E \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\mu} \, \mathrm{d}\mu} \tag{8.2}$$

Es folgt, dass für jede τ-integrierbare oder nichtnegative messbare numerische Funktion g gilt

$$\int g \, \mathrm{d}\tau = \int g \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\mu} \, \mathrm{d}\mu.$$

Man kann sich daran durch folgende einprägsame Formel erinnern:

$$\boxed{\mathrm{d}\tau = \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}\mu} \, \mathrm{d}\mu}$$

Bemerkung 6. Ein wichtiger Spezialfall ist der des Lebesgue-Masses λ auf $\mathbb{R}^p$. Sei T ein Diffeomorphismus von $\mathbb{R}^p$. Wir definieren

$$\lambda_T(A) := \lambda(T(A)), \qquad A \in \mathcal{L}^p.$$

Es ist nicht schwierig zu zeigen, dass λ_T auch ein Mass auf der Lebesgue-Algebra ist und $\lambda_T \ll \lambda$. Wegen des Satzes von Radon–Nikodým ist dann der Transformationssatz äquivalent zu

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\lambda_T}{\mathrm{d}\lambda} = |\det \mathrm{d}T| \text{ f.ü.}}$$

Man kann den Transformationssatz dann auch so beweisen, indem man diese Formel zeigt. Das kann man tun, indem man auf angebracht kleinen Bällen in der Umgebung von jedem Punkt arbeitet, s. z.B. [R, 7.26].

Literatur

[A3] A. Amann, *Analysis III*, Birkhäuser
[B] R. G. Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Wiley Classics Library.
[E] J. Elstrodt, *Maß- und Integrationstheorie*, Springer.
[F] G. Fischer, *Lineare Algebra*, 13. Auflage, vieweg studium.
[K2] K. Königsberg, *Analysis II*, 5. Auflage, Springer.
[R] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, 3rd edition, McGraw-Hill.