LINEARE ALGEBRA FÜR ANALYSIS

ALBERTO S. CATTANEO

ZUSAMMENFASSUNG. Eine Zusammenfassung der wichtigsten in der Analysis gebrauchten Grundbegriffe aus der linearen Algebra (speziell für diejenigen, die lineare Algebra nicht besuchen).

In der Analysis braucht man normalerweise nur reelle oder komplexe Vektoren. Mit $\mathbb{K}$ wird der Körper der reellen oder der komplexen Zahlen bezeichnet.

1. Vektoren

Ein n-dimensionaler Vektor ist ein Element von $\mathbb{K}^n$. Es gibt zwei übliche Bezeichnungen für einen Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{K}^n$:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad x_i \in \mathbb{K}\ \forall i, \qquad \text{Zeilenvektor}$$

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad x_i \in \mathbb{K}\ \forall i, \qquad \text{Spaltenvektor}$$

Die Elemente x_i heissen Komponenten. Der Nullvektor, den man mit $\mathbf{0}$ bezeichnet, ist der Vektor, dessen Komponenten gleich Null sind.

Die Addition von Vektoren ist komponentenweise definiert:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n).$$

Das entspricht der gewöhnlichen Parallelogrammregel, wenn die Vektoren graphisch als Pfeile dargestellt werden. Die Menge $\mathbb{K}^n$ mit der Addition und dem Nullvektor ist eine abelsche Gruppe.

Die Skalarmultiplikation — d.h. die Multiplikation eines Vektors $\mathbf{x}$ mit einem Element $\lambda \in \mathbb{K}$, das man Skalar nennt — ist ebenso komponentenweise definiert:

$$\lambda\,(x_1, x_2, \dots, x_n) := (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

Diese Verknüpfungen erfüllen folgende Rechenregeln: $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \in \mathbb{K}, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ gilt

$$\begin{aligned} \lambda(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= \lambda\mathbf{x}+\lambda\mathbf{y} \\ (\lambda+\mu)\mathbf{x} &= \lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{x} \\ \lambda(\mu\mathbf{x}) &= (\lambda\mu)\mathbf{x} \\ 1\mathbf{x} &= \mathbf{x} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Mit $\mathbf{e}_i \in \mathbb{K}$, $i \in \{1, \dots, n\}$ bezeichnet man den Vektor, dessen $i$te Komponente gleich 1 ist und dessen andere Komponenten gleich 0 sind. Das Tupel $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ heisst die Standardbasis von $\mathbb{K}^n$. Jeden Vektor $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ kann man eindeutig als

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i\, \mathbf{e}_i.$$

schreiben.

2. Vektorräume

Ein $\mathbb{K}$-Vektorraum ist eine abelsche Gruppe $(V, +, 0)$ zusammen mit einer Abbildung

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times V &\to V \\ (\lambda, v) &\mapsto \lambda\, v \end{aligned}$$

die alle Rechenregeln in (1.1) erfüllt.

Beispiel 1. Das ist eine Liste wichtiger Vektorräume:

(1) Die Mengen $\mathbb{K}^n$ mit der im Abschnitt 1 definierten Struktur.
(2) Die Menge $\mathbb{K}^0 := \{0\}$ mit $0 + 0 := 0$ und $\lambda\, 0 := 0$, $\lambda \in \mathbb{K}$.
(3) Die Menge $\mathrm{Abb}(M, \mathbb{K})$ aller Abbildungen von einer Menge M nach $\mathbb{K}$ mit

$$\begin{aligned} (f+g)(x) &:= f(x) + g(x) \\ (\lambda\, f)(x) &:= \lambda\, f(x) \end{aligned}$$

mit $f, g \in \mathrm{Abb}(M, \mathbb{K})$, $\lambda \in \mathbb{K}$.
(4) Folgende (Funktionenräume genannte) Teilmengen von $\mathrm{Abb}(I, \mathbb{K})$, wobei I ein Intervall ist und die Struktur ist im Punkt (3) definiert:
  (a) $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K}) = \{$stetige Abbildungen auf $I\}$
  (b) $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{K}) = \{k$-mal stetig differenzierbare Abbildungen auf $I\}$
  (c) $\mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{K}) = \{$beliebig oft stetig differenzierbare Abbildungen auf $I\}$
  (d) $\mathcal{T}(I, \mathbb{K}) = \{$Treppenfunktionen auf $I\}$
  (e) $\mathcal{R}(I, \mathbb{K}) = \{$Regelfunktionen auf $I\}$

(5) Die Menge $\mathbb{K}[x]$ aller Polynome in der Unbestimmten x mit Koeffizienten aus $\mathbb{K}$ mit

$$\left(\sum a_i\,x^i\right) + \left(\sum b_i\,x^i\right) := \sum (a_i + b_i)\,x^i$$
$$\lambda\left(\sum a_i\,x^i\right) := \sum (\lambda\,a_i)\,x^i$$

Satz 1. *In einem Vektorraum gelten folgende Rechenregeln:*

(1) $\lambda\,v = 0 \iff \lambda = 0 \vee v = 0$
(2) $(-1)\,v = -v$

3. Matrizen

Eine $\mathbb{K}$-Matrix ist eine Tabelle von Elemente aus $\mathbb{K}$. Man verwendet folgende Bezeichnung für eine $m \times n$-Matrix:

$$\mathsf{A} = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Die Elemente $a_{ij} \in \mathbb{K}$ heissen Einträge. Die n-dimensionalen Zeilenvektoren bzw. Spaltenvektoren sind Beispiele von $1 \times n$- bzw. $n \times 1$-Matrizen.

Matrizen kann man komponenentenweise addieren und mit Skalaren multiplizieren:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\,a_{11} & \lambda\,a_{12} & \dots & \lambda\,a_{1n} \\ \lambda\,a_{21} & \lambda\,a_{22} & \dots & \lambda\,a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda\,a_{m1} & \lambda\,a_{m2} & \dots & \lambda\,a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Die Menge $\mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{K})$ aller $m \times n$-Matrizen ist damit ein Vektorraum.

Eine $m \times n$-Matrix A definiert eine Abbildung $\phi_{\mathsf{A}} \colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$,

$$\phi_{\mathsf{A}}(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \cdots + a_{1n}\,x_n \\ a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \cdots + a_{2n}\,x_n \\ \vdots \\ a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \cdots + a_{mn}\,x_n \end{pmatrix},$$

die folgende Eigenschaft besitzt:

$$\phi_{\mathsf{A}}(\lambda\,\mathbf{x} + \mu\,\mathbf{y}) = \lambda\,\phi_{\mathsf{A}}(\mathbf{x}) + \mu\,\phi_{\mathsf{A}}(\mathbf{y}), \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{K}^n. \tag{3.1}$$

Die Komposition solcher Abbildungen ist wieder solch eine Abbildung: Seien $\mathsf{A} \in \mathrm{Mat}(r \times m, \mathbb{K})$ und $\mathsf{B} \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{K})$; dann gilt

$$\phi_{\mathsf{A}} \circ \phi_{\mathsf{B}} = \phi_{\mathsf{AB}}, \tag{3.2}$$

wobei AB die $r \times n$-Matrix mit Einträgen c_{ij} ist:

$$c_{ij} := \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\,b_{kj}. \tag{3.3}$$

Beispiel 2.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bt \\ cx + dz & cy + dt \end{pmatrix}$$

Die so definierte Matrixmultiplikation erfüllt folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned} (\mathsf{AB})\mathsf{C} &= \mathsf{A}(\mathsf{BC}), \\ (\mathsf{A} + \mathsf{B})\mathsf{C} &= \mathsf{AC} + \mathsf{AC}, \\ \mathsf{A}(\mathsf{B} + \mathsf{C}) &= \mathsf{AB} + \mathsf{AC}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Bemerkung 1. Im Allgemeinen $\mathsf{AB} \neq \mathsf{BA}$.

Bemerkung 2. Anhand der Matrixmultiplikation kann man die Abbildung ϕ_{A} auch wie folgt schreiben:

$$\phi_{\mathsf{A}}(\mathbf{x}) = \mathsf{A}\,\mathbf{x},$$

wobei der Spaltenvektor $\mathbf{x}$ als Matrix aufgefasst wird.

Eine Matrix mit gleicher Anzahl Zeilen und Spalten heisst quadratisch. Eine quadratische Matrix mit n Zeilen (und Spalten) heisst auch n-Quadrat-Matrix. Die Multiplikation zweier n-Quadrat-Matrizen ist wiederum eine n-Quadrat-Matrix. Gemäss (3.4) ist $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{K})$ ein

Ring; er besitz das Einselement

$$\mathsf{1}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

das Einheitsmatrix heisst.

Eine n-Quadrat-Matrix A heisst invertierbar, wenn es eine n-Quadrat-Matrix B mit $\mathsf{AB} = \mathsf{1}_n$ gibt. Dies ist äquivalent zu der Bedingung, dass es eine Matrix B' gibt, für die $\mathsf{B}'\mathsf{A} = \mathsf{1}_n$ gilt. Zudem sind die Matrizen B und B' eindeutig bestimmt und es gilt $\mathsf{B} = \mathsf{B}'$. Die Menge aller invertierbaren n-Quadrat-Matrizen ist eine Gruppe, die man mit $GL(n, \mathbb{K})$ bezeichnet.

Satz 2. *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1. A *ist invertierbar.*
2. ϕ_{A} *ist invertierbar.*
3. $\det \mathsf{A} \neq 0$ *(*s. folgenden Abschnitt*).*

4. Die Determinante

Zu jeder n-Quadrat-Matrix A ordnet man eine Zahl $\det \mathsf{A} \in \mathbb{K}$, die Determinante, die nach Laplace rekursiv wie folgt berechnet werden kann:

1. Ist $n = 1$, so ist $\det(a) := a$.
2. $\det \mathsf{A} := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{1i} \det \mathsf{A}_{1i}$, wobei A_{1i} ist die von A erhaltene Matrix durch das Streichen der ersten Zeile und der $i$ten Spalte.

Es gibt auch folgende explizite (aber komplizierte) Formel von Leibniz:

$$\det \mathsf{A} = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)} \dots a_{n\sigma(n)},$$

wobei S_n die Gruppe Permutationen aus n Elementen ist und $\operatorname{sign}(\sigma)$ das Vorzeichen der Permutation σ bezeichnet.

Beispiel 3.

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

Satz 3. *Die Determinante erfüllt folgende Rechenregeln:*

(1) $\det \mathsf{A}^t = \det \mathsf{A}$, *wobei* A^t *die* ***transponierte Matrix***

$$\mathsf{A}^t = (a_{ji}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

bezeichnet.

(2) $\det(\mathsf{AB}) = (\det \mathsf{A})(\det \mathsf{B})$.

Insbesondere ist die Einschränkung von det auf invertierbaren Matrizen

$$\det\colon GL(n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K} \setminus \{0\}$$

ein Gruppenhomomorphismus. Seinen Kern, d.h. die Untergruppe von Matrizen, die $\det \mathsf{A} = 1$ erfüllen, bezeichnet man mit $SL(n, \mathbb{K})$.

5. Lineare Abbildungen

Eine Abbildung ϕ von einem Verktoraum V in einen Vektorraum W heisst **linear**, wenn

$$\phi(\lambda\, v + \mu\, w) = \lambda\, \phi(v) + \mu\, \phi(w), \qquad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \forall v, w \in W.$$

Beispiel 4. Folgende Abbildungen sind linear:

(1) $\phi_{\mathsf{A}}\colon \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ mit $\mathsf{A} \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{K})$ (s. Gleichung (3.1)).
(2) $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{K}) \to \mathcal{C}^{k-1}(I, \mathbb{K})$, $f \mapsto f'$.
(3) $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{K}) \to \mathcal{C}^{k+1}(I, \mathbb{K})$, $f \mapsto F$ mit $F(x) = \int_a^x f(x)\, \mathrm{d}x$, $a \in I$.
(4) $\mathcal{R}([a; b], \mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, $f \mapsto \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x$.

Eine lineare Abbildung heisst auch **Homomorphismus**; ist die Zielmenge gleich dem Definitionsbereich, so heisst der Homomorphismus auch **Endomorphismus**; ist die Zielmenge $\mathbb{K}$, so heisst der Homomorphismus auch **Linearform**.

Die Menge $\mathrm{Hom}(V, W)$ aller Homomorphismen von V nach W ist ein Vektorraum mit

$$(\phi + \psi)(v) := \phi(v) + \psi(v), \quad (\lambda\, \phi)(v) := \lambda\, \phi(v),$$

wobei $\phi, \psi \in \mathrm{Hom}(V, W)$, $v \in V$, $\lambda \in \mathbb{K}$. Man bezeichnet mit $\mathrm{End}(V) := \mathrm{Hom}(V, V)$ den Vektorraum aller Endomorphismen von V und mit $V^* := \mathrm{Hom}(V, \mathbb{K})$ den Vektorraum aller Linearformen auf V, der auch der **Dualraum** von V heisst.

Die Komposition zweier linearer Abbildungen ist wiederum linear. Ist eine lineare Abbildung $\phi\colon V \to W$ umkehrbar, so ist ihre Umkehrabbildung $\phi^{-1}\colon W \to V$ auch linear. Eine umkehrbare lineare Abbildung heisst Isomorphismus. Ein umkehrbarer Endomorphismus heisst Automorphismus. Die Menge $\mathrm{Aut}(V)$ aller Automorphismen von V ist dann eine Gruppe.

Gibt es einen Isomorphismus $V \to W$, so heissen die Vektorräume V und W isomorph und man schreibt $V \simeq W$.

Beispiel 5. $\mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{K}) \simeq \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$; inbesonders $\mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{K}) \simeq \mathrm{End}(\mathbb{K}^n)$. Der Isomorphismus ist die Abbildung $\mathsf{A} \mapsto \phi_{\mathsf{A}}$. Die Umkehrabbildung kann man auch explizit wie folgt gewinnen: Seien (e_i) bzw. (f_i) die Standardbasen von $\mathbb{K}^n$ bzw. $\mathbb{K}^m$. Ist $\phi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$, so kann man $\phi(e_j)$ eindeutig wie folgt schreiben:

$$\phi(e_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\, f_i.$$

Die Koeffizienten a_{ij} betrachet man als Einträge einer Matrix A_ϕ. Das definiert die Umkehrabbildung.

Dieser Isomorphismus ist mit den Kompositionen verträglich, s. (3.2). Insbesonders sind $\mathrm{Aut}(\mathbb{K}^n)$ und $GL(n, \mathbb{K})$ isomorphe Gruppen.

Bemerkung 3. Werden die Elemente von $\mathbb{K}^n$ als Spaltenvektoren bezeichnet, so werden Linearformen auf $\mathbb{K}^n$ durch Zeilenvektoren dargestellt. Die Mengen der n-dimensionalen Zeilenvektoren ist dann der Dualraum $(\mathbb{K}^n)^*$. Wir sehen damit, dass $\mathbb{K}^n \simeq (\mathbb{K}^n)^*$.

Satz 4. $\mathbb{K}^m \simeq \mathbb{K}^n \iff m = n$

Definition 1. Ist $V \simeq \mathbb{K}^n$, so ist V n-dimensional und man schreibt $\dim V = n$. Ein Vektorraum, der zu einem $\mathbb{K}^n$ isomorph ist, heisst endlich dimensional, einer, der zu keinem isomorph ist, unendlich dimensional.

Wegen Satz 4 ist die Dimension wohldefiniert. Wir werden im nächsten Abschnitt eine zweite (äquivalente) Definition der Dimension sehen.

Bemerkung 4. Aus Bemerkung 3 folgt, dass ein endlich dimensionaler Vektorraum V isomorph zu seinem Dualraum ist: $V^* \simeq V$. Diese Eigenschaft gilt für unendlich dimensionale Verktorräume im Allgemeinen nicht.

Satz 5. *Seien V und W* endlich dimensionale *Vektorräume der gleichen Dimension und sei $\phi\colon V \to W$ linear. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) *ϕ ist injektiv.*
(2) *ϕ ist surjektiv.*
(3) *ϕ ist bijektiv (d.h. ϕ ist ein Isomorphismus).*

6. Bilinearformen

Sei V ein Vektorraum. Eine Abbildung $B\colon V \times V \to \mathbb{K}$ heisst Bilinearform, wenn sie bezüglich beider Argumente linear ist, d.h.,

$$B(\lambda\, v + \mu\, w, z) = \lambda\, B(v, z) + \mu\, B(w, z),$$
$$B(z, \lambda\, v + \mu\, w) = \lambda\, B(z, v) + \mu\, B(z, w),$$

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\forall v, w, z \in W$. Eine Bilinearform B heisst symmetrisch, wenn $B(v, w) = B(w, v)$ $\forall v, w \in V$. Ist eine Bilinearform symmetrisch, genügt es, die Linearität einer der zwei Argumente zu verifizieren.

Beispiel 6. Das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{K}^n$

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$$

ist eine symmetrische Bilinearform.

Einer Bilinearform B auf V ordnet man die lineare Abbildung

$$\begin{aligned} B^\sharp\colon\ V &\to V^* \\ v &\mapsto B^\sharp(v) \end{aligned}$$

zu, wobei $B^\sharp(v)(w) := B(v, w)$. Die Bilinearform B heisst nichtentartet, wenn $B^\sharp$ injektiv ist. Im endlich dimensionalen Falle ist das gemäss Satz 5 mit der Bedingung, dass $B^\sharp$ ein Isomorphismus ist, gleichbedeutend.

Beispiel 7. Der Standardskalarprodukt auf $\mathbb{K}^n$ ist nichtentartet. Der induzierte Isomorphismus $t\colon \mathbb{K}^n \to (\mathbb{K}^n)^*$ ist die Transposition eines Spaltenvektors zu einem Zeilenvektor.

7. Basen

Sei V ein Vektorraum und $M = (v_i)_{i \in I}$ eine Familie Elemente aus V; d.h. I ist eine geordnete Menge — die "Indexmenge" — und $v_i \in V$ $\forall i \in I$. (Ist I endlich, so heisst die Familie M auch Tupel.)

Eine Linearkombination von Elementen von M ist eine *endliche Summe* der Form

$$\lambda_{i_1} v_{i_1} + \ldots \lambda_{i_k} v_{i_k}$$

mit $\lambda_{i_j} \in \mathbb{K}$. Die Familie M heisst Erzeugendensystem, wenn sich jedes $v \in V$ als Linearkombination von Elementen von M schreiben lässt. Ein Erzeugendensystem M heisst Basis, falls für jedes $v \in V$ die

Koeffizienten, die auch Koordinaten heissen, der entsprechenden Linearkombination von Elementen von M eindeutig bestimmt sind.[1]

Beispiel 8. Die Standardbasis von $\mathbb{K}^n$ ist eine Basis.

Beispiel 9. Die Familie $M := (x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Basis von $\mathbb{K}[x]$, s. Punkt 5 von Beispiel 1.

Satz 6. *Hat ein Vektorraum eine endliche Basis, so ist jede seiner Basen endlich.*

Ein Vektorraum mit einer endlichen Basis heisst endlich dimensional, einer ohne endliche Basis unendlich dimensional. Beispiel 8 zeigt, dass die $\mathbb{K}^n$ endlich dimensional sind, Beispiel 9, dass $\mathbb{K}[x]$ unendlich dimensional ist. Die Funktionenräume im Punkt 4 von Beispiel 1 sind ebenso unendlich dimensional.

Die Anzahl der Elemente einer Basis eines endlich dimensionalen Vektorraums ist eine zweite Definition der Dimension eines Vektorraums. Sie entspricht der Definition im vorherigen Abschnitt, denn die Wahl einer Basis $(v_1, \dots v_n)$ eines Vektorraums V definiert den Isomorphismus

$$\begin{gathered} V \to \mathbb{K}^n \\ v = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, v_i \mapsto (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \end{gathered}$$

Ist B eine nichtentartete Bilinearform, so heisst eine Basis (v_i) mit $B(v_i, v_j) = \delta_{ij}$ Orthonormalbasis. Zum Beispiel ist die Standardbasis eine Orthonormalbasis für das Standardskalarprodukt.

7.1. **Basiswechsel.** Sind (v_i) und $(\tilde{v}_i)$ Basen eines n-dimensionalen Vektorraums, so kann man jedes $\tilde{v}_j$ in der Basis (v_i) eindeutig entwickeln

$$\tilde{v}_j = \sum_{i=1}^{n} s_{ij} \, v_i$$

und umgekehrt. Die s_{ij} fasst man als Einträge einer invertierbaren n-Quadrat-Matrix S auf, die Transformationsmatrix des Basiswechsels.

[1]Steht ein Begriff Konvergenz zur Verfügung, so kann man Linearkombinationen auch als unendliche, aber konvergente, Summen definieren. Bezüglich der gleichmässigen Konvergenz ist in diesem Sinne der Raum $\mathcal{T}([a;b], \mathbb{K})$ der Treppenfunktionen ein erzeugendes System, aber keine Basis, des Raums $\mathcal{R}([a;b], \mathbb{K})$ der Regelfunktionen. In diesen Notizen werden wir aber nur endliche Linearkombinationen in Betracht ziehen.

Ist $\sum_{j=1}^n x_j \, \tilde v_j = \sum_{i=1}^n y_i \, v_i$, so gilt

$$y_i = \sum_{j=1}^n s_{ij} \, x_j,$$

oder, in Vektornotation,

$$\mathbf{y} = \mathsf{S} \, \mathbf{x}.$$

Man nennt ein solches S eine Koordinatentransformation.

8. Darstellende Matrizen

Durch die Wahl von Basen kann man Homomorphismen, Endomorphismen und Bilinearformen durch Matrizen darstellen. Unter einem Basiswechsel verändert sich die darstellende Matrix durch festgelegte Regeln. **Warnung:** die Transformationsregeln der darstellenden Matrizen für Homomorphismen sind anders als die für Endomorphismen und als die für Bilinearformen.

8.1. **Homomorphismen.** Seien V und W endlich dimensionale Vektorräume und sei $\phi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Wählt man eine Basis $(v_j)_{j=1,\dots,n}$ von V und eine Basis $(w_i)_{i=1,\dots,m}$ von W, so hat man eindeutig bestimmte Koeffiziente a_{ij}, die

$$\phi(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} \, w_i$$

erfüllen. Wie im Beispiel 5 betrachet man die Koeffizienten a_{ij} als Einträge einer Matrix A, die die bezüglich der Basen (v_j) und (w_i) darstellende Matrix der linearen Abbildung ϕ heisst.

Wählen wir jetzt andere Basen $(\tilde v_j)$ bzw. $(\tilde w_i)$ von V bzw. W, so erhalten wir eine andere darstellende Matrix $\tilde{\mathsf{A}}$ mit Einträgen $\tilde a_{ij}$, die durch die Formel

$$\phi(\tilde v_j) = \sum_{i=1}^m \tilde a_{ij} \, \tilde w_i$$

definiert werden. Sind $\mathsf{S} \in GL(n, \mathbb{K})$ und $\mathsf{T} \in GL(m, \mathbb{K})$ die entsrechenden Trasnformationsmatrizen, deren Einträgen s_{kj} und t_{li} durch die Formeln

$$\tilde v_j = \sum_{k=1}^n s_{kj} \, v_k, \quad \tilde w_i = \sum_{l=1}^m t_{li} \, w_l$$

definiert werden, so erhält man aus der Linearität von ϕ, aus der Eindeutigkeit der Entwicklung in der Basis (w_i) und dank der Formel (3.3) für die Matrixmultiplikation die Relation $\mathsf{A}\,\mathsf{S} = \mathsf{T}\,\tilde{\mathsf{A}}$. Wegen der Umkehrbarkeit von T kann man das auch als

$$\tilde{\mathsf{A}} = \mathsf{T}^{-1}\,\mathsf{A}\,\mathsf{S}.$$

schreiben. Zwei Matrizen A und $\tilde{\mathsf{A}}$, für die derartige invertierbare Matrizen S und T gibt, dass obige Relation erfüllt ist, heissen äquivalent. Die Äquivalenz von Matrizen ist eine Äquivalenzrelation.

Satz 7 (Normalform). *Jede Matrix ist zu einer Matrix der Form*

$$\begin{pmatrix} \mathsf{1}_r & \mathsf{O} \\ \mathsf{O} & \mathsf{O} \end{pmatrix}$$

äquivalent, wobei r eine eindeutig bestimmte Zahl (der Rang *der Matrix) ist, und die O Kästchen bezeichnen, wo alle Einträge gleich Null sind.*

8.2. **Endomorphismen.** Ist V ein endlich dimensionaler Vektorraum und ϕ ein Endomorphismus, so ergibt die Wahl einer Basis $(v_i)_{i=1,\dots,n}$ die darstellende Matrix A mit Einträgen, welche durch folgende Formel definiert sind:

$$\phi(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, v_i. \tag{8.1}$$

Ist $(\tilde{v}_i)$ eine andere Basis und S die entsprechende Transformationsmatrix, so erhalten wir folgende Relation zwischen den darstellenden Matrizen A und $\tilde{\mathsf{A}}$ bezüglich der zwei Basen:

$$\tilde{\mathsf{A}} = \mathsf{S}^{-1}\,\mathsf{A}\,\mathsf{S}. \tag{8.2}$$

Zwei n-Quadrat-Matrizen A und $\tilde{\mathsf{A}}$, für die eine Matrix $\mathsf{S} \in GL(n, \mathbb{K})$ existiert, so dass obige Relation erfüllt ist, heissen ähnlich. Die Ähnlichkeit Matrizen ist auch eine Äquivalenzrelation. Gemäss der Rechenregel im Punkt 2 vom Satz 3 sind die Determinanten ähnlicher Matrizen gleich:

$$\det \tilde{\mathsf{A}} = \det \mathsf{A}.$$

Damit kann man die Determinante $\det \phi$ einer linearen Abbildung ϕ als die Determinante einer (und deshalb jeder) ihrer dartsellenden Matrizen definieren. Es gilt dann:

$$\phi \text{ umkehrbar} \iff \det \phi \neq 0.$$

Bemerkung 5. Es gibt eine zweite sehr wichtige Invariante von ähnlichen Matrizen, die Spur, die als Summe aller Diagonaleinträge definiert wird:

$$\operatorname{Sp} \mathsf{A} := a_{11} + \cdots + a_{nn}.$$

Es gilt

$$\operatorname{Sp} \mathsf{AB} = \operatorname{Sp} \mathsf{BA}$$

für je zwei Matrizen A und B, und daraus folgt, dass zwei darstellende Matrizen $\tilde{\mathsf{A}}$ und A des selben Endomorphismus die gleiche Spur besitzen:

$$\operatorname{Sp} \tilde{\mathsf{A}} = \operatorname{Sp} \mathsf{A}.$$

Damit kann man die Spur $\operatorname{Sp} \phi$ eines Endomorphismus ϕ definieren.

Besonders wichtig sind die diagonalisierbaren Matrizen, d.h. die Matrizen die zu einer Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots\dots\dots \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots\dots \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & \dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0 & \dots\dots & & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

ähnlich sind. Die Einträge $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ heissen Eigenwerte. Nicht jede Matrix ist diagonalisierbar!

Ist (v_i) die Basis, in der A diagonal ist, so haben wir, wegen der Definition (8.1) der darstellenden Matrix,

$$\phi(v_i) = \lambda_i \, v_i.$$

Der von Null verschiedene Vektor v_i heisst Eigenvektor zum Eigenwert λ_i. Es gilt $\det \phi = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ und $\operatorname{Sp} \phi = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$.

8.3. **Bilinearformen.** Sei V endlich dimensional und B eine Bilinearform auf V. Ist $(v_i)_{i=1,\dots,n}$ eine Basis von V, so ordnet man zur Bilinearform B die darstellende Matrix B mit Einträgen

$$b_{ij} := B(v_i, v_j)$$

zu. Die Bilinearform B ist symmetrisch genau dann, wenn $\mathsf{B}^t = \mathsf{B}$ gilt.

Ist $(\tilde{v}_j)$ eine andere Basis und S die entsprechende Transformationsmatrix, so gilt folgende Beziehung zwischen der zwei darstellenden Matrizen:

$$\tilde{\mathsf{B}} = \mathsf{S}^t \, \mathsf{B} \, \mathsf{S}.$$

Man bemerke, dass die Transformationsregel anders ist als in (8.2). Die zwei Regeln sind identisch nur im Fall, dass $\mathsf{S}^t = \mathsf{S}^{-1}$ gilt, d.h. wenn S eine orthogonale Matrix ist.

Wegen der Rechenregeln im Satz 3 haben wir $\det \tilde{\mathsf{B}} = \det \mathsf{B} \, (\det \mathsf{S})^2$. Die Determinante einer darstellenden Matrix ist deshalb keine intrinsische Eigenschaft der Bilinearform. Es gilt aber:

(1) Ist die Determinante einer darstellenden Matrix von Null verschieden, dann ist die Determinante jeder andere darstellenden Matrix für die gleiche Bilinearform auch ungleich Null. Es gilt

$$B \text{ nichtentartet} \iff \det \mathsf{B} \neq 0.$$

(2) Arbeite man über $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, so haben die Determinanten aller darstellenden Matrizen einer gegebenen nichtentarteten Bilinearform das gleiche Vorzeichen.

Satz 8 (Trägheitssatz von Sylvester)**.** *Sei B eine symmetrische Bilinearform auf einem n-dimensionalen* reellen *Vektorraum V. Dann gibt es eine darstellende Matrix der Form*

$$\mathsf{B} = \begin{pmatrix} 1_k & 0 & 0 \\ 0 & -1_l & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei die Zahlen k und l nur von der Bilinearform abhängen.

Bemerkung 6. Sei $V = \mathbb{R}^2$ und $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{ij} x_i\, a_{ij}\, y_j$ mit $a_{12} = a_{21}$. Die Gleichung $B(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 1$ beschreibt eine Kurve. Ist B nichtertatet, so ist die Kurve für $k = 2$ eine Ellipse und für $k = l = 1$ eine Hyperbel (und die leere Menge für $l = 2$). Die Basisvektoren, in der die darstellende Matrix die obige einfache Form hat, sind die Hauptachsen der Kurve.

Will man die euklidische Struktur des $\mathbb{R}^n$, die durch das kanonische Skalarprodukt beschrieben ist, erhalten, so kann man im Allgemeinen eine symmetrische Bilinearform zur einfachen Form vom Satz 8 nicht bringen, aber man kann sie immer diagonalisieren; nämlich:

Satz 9 (Hauptachsentransformation)**.** *Sei $\mathsf{A} \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch und B die entsprechende Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$: $B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \mathbf{x}^t\, \mathsf{A}\, \mathbf{y}$. Dann gibt es eine Orthonormalbasis $\{v_i\}$ bez. des kanonischen Skalarproduktes, in der B diagonal ist; d.h., es gibt Konstanten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (eigentlich die Eigenwerte von A) mit*

$$(v_i, v_j) = \delta_{ij}, \qquad B(v_i, v_j) = \lambda_i\, \delta_{ij}.$$

9. Weitere Beispiele aus der Analysis

Beispiel 10. Sei f eine reellwertige differenzierbare Funktion auf $U \subset \mathbb{R}^n$. Dann ist ihr Differential $\mathrm{d}f(x)$, $x \in U$, eine Linearform auf $\mathbb{R}^n$, die in der Standardbasis durch den Zeilenvektor

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \right)$$

dargestellt wird. Unter dem durch das Standardbasis induzierten Isomorphismus $t^{-1}\colon (\mathbb{R}^n)^* \to \mathbb{R}^n$ vom Beispiel 7 wird die Linearform $\mathrm{d}f(x)$ zum Vektor $\operatorname{grad} f(x)$, dem Gradienten von f, abgebildet. In der Standardbasis wird der Gradient durch den Spaltenvektor

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{pmatrix}$$

dargestellt.

Beispiel 11. Sei f eine reellwertige zweimal differenzierbare Funktion auf $U \subset \mathbb{R}^n$. Das zweite Differential $\mathrm{d}^2 f(x)$, $x \in U$, ist eine Bilinearform auf $\mathbb{R}^n$, die in der Standardbasis durch die Matrix mit Einträgen

$$b_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

dargestellt wird. Ist f zweimal stetig differenzierbar, so ist $\mathrm{d}^2 f(x)$ symmetrisch.

Beispiel 12. Sei F eine differenzierbare Abbildung von $U \subset \mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^m$. Dann ist ihr Differential $\mathrm{d}F(x)$, $x \in U$, eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, die in den Standarbasen durch die Matrix mit Einträgen

$$a_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}$$

dargestellt wird.