Übungsblatt 13 - Lösung

Aufgabe 1

a) Für jedes x_1 und $x_2 \in D(f)$ muss gelten: $x_1 \neq x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) \neq f(x_2)$ und für jedes $y \in W(f)$ existiert ein x so, dass $y = f(x)$ ist.

b) Der Graph von $f^{-1}(x)$ entsteht aus dem Graphen $f(x)$ durch Spiegelung an der 45^0-Geraden $y = x$.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

a) 1) (1 Punkt) Die Ableitung der Funktion y ist $y' = \frac{3}{2}(x+2)^2$. Sie ist für $x \in \mathbb{R}$ wachsend. Das bedeutet, dass zu jedem Wert x nur ein einziger Funktionswert $y = f(x)$ existiert. Siehe auch graphische Darstellung.

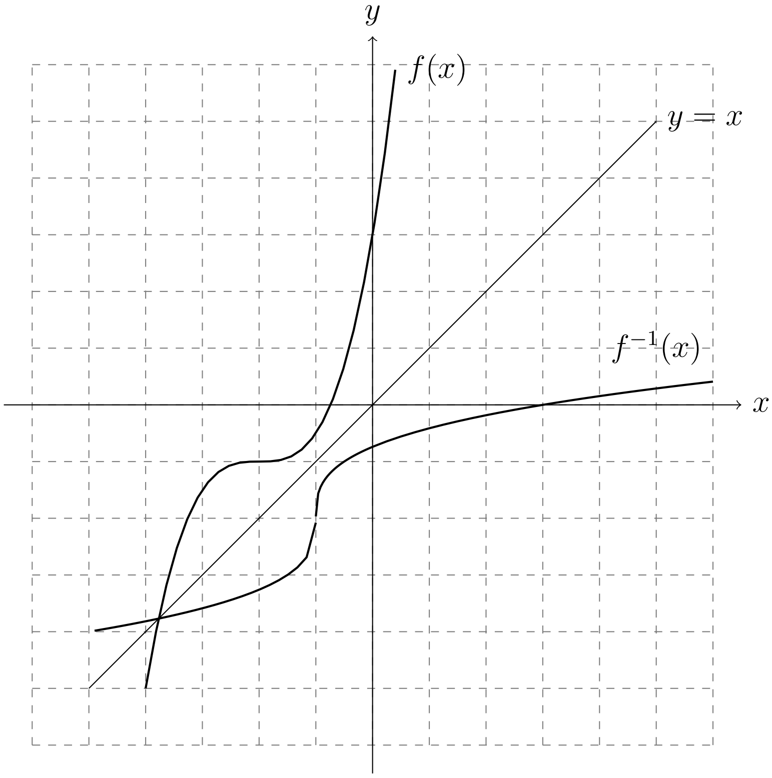
2) (1 Punkt) Wir lösen nach x auf und vertauschen anschliessend x und y.

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{1}{2}(x+2)^3 - 1 && \Big| +1 \\
y + 1 &= \frac{1}{2}(x+2)^3 && \Big| \cdot 2 \\
2y + 2 &= (x+2)^3 && \Big| \sqrt[3]{\cdots} \\
\sqrt[3]{2y+2} &= x + 2 && \Big| -2 \\
\sqrt[3]{2y+2} - 2 &= x && \Big| x \leftrightarrows y \\
y &= \sqrt[3]{2x+2} - 2 && \Big|
\end{aligned}
$$

3) (1 Punkt) Durch die Spiegelung des Graphen von f an der 45^o Geraden geht der Definitionsbereich von f in den Wertebereich von f^{-1} über. Der Wertebereich von f geht in den Definitionsbereich von f^{-1} über.

$$
\begin{array}{llcll}
D(f): & -\infty < x < \infty & \Rightarrow & W(f^{-1}) = D(f): & -\infty < y < \infty \\
W(f): & -\infty < y < \infty & \Rightarrow & D(f^{-1}) = W(f): & -\infty < x < \infty
\end{array}
$$

4) (1 Punkt) Graphische Darstellung:



b) (2 Punkte)
Wir wählen $f(x) = e^x$ und $g(x) = \ln(x)$.
Damit ist $g(x)$ die Umkehrfunktion von $f(x)$. (1 Punkt)
Daraus folgt dann:

$$g'(x) = \big(\ln(x)\big)' = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{e^{g(x)}} = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$$ (1 Punkt)

Aufgabe 3 (5 Punkte)

a) (1 Punkt) Für die Berechnung der Ableitung von $\arctan\left(\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\right)$ benötigen wir

$$\Big(\arctan(x)\Big)' = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{und} \quad \Big(\sqrt{x}\Big)' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad \text{(1 Punkt)}$$

Durch Anwendung der Kettenregel erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
\arctan\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)' &= \frac{1}{1+\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)^2} \cdot \left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)' \\
&= \frac{1}{1+\frac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}} \cdot \left(\frac{x-1}{x+1}\right)' \\
&= \frac{x+1}{x+1+x-1} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} \\
&= \frac{x+1}{2x} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{\cancel{2}}{(x+1)^2} = \frac{x+1}{2x} \cdot \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} \\
&= \frac{\cancel{x+1}}{2x} \cdot \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{1}{(x+1)^{\cancel{2}}} = \frac{1}{2x} \cdot \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{1}{x+1} \\
&= \frac{1}{2x} \cdot \frac{\cancel{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x-1}} \cdot \frac{1}{\cancel{\sqrt{x+1}} \cdot \sqrt{x+1}} = \frac{1}{2x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1}} \\
&= \frac{1}{2x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \qquad \text{(1 Punkt)}
\end{aligned}$$

b) (2 Punkte) Durch Umformung von $f(x)$ erhalten wir

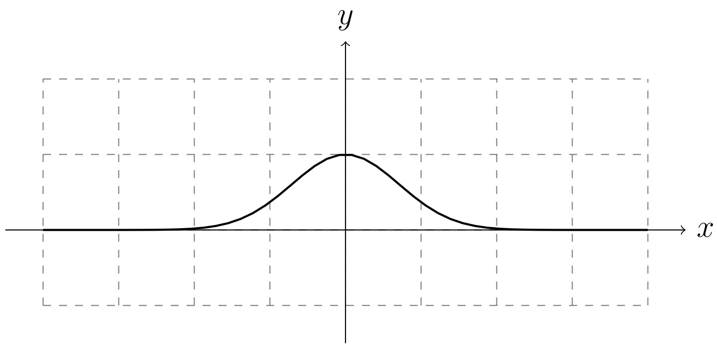
$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{4x^2+16x+17} = \frac{1}{4x^2+16x+16+1} == \frac{1}{(2x+4)^2+1} \\
&= \frac{1}{1+(2x+4)^2} \qquad \text{(1 Punkt)}
\end{aligned}$$

Mit $u(x) = 2x+4 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{du}{dx} = 2 \quad \Rightarrow \quad dx = \dfrac{du}{2}$ folgt:

$$\begin{aligned}
\int f(x)\,dx &= \int \frac{1}{1+(2x+4)^2}\,dx = \int \frac{1}{1+u^2}\,\frac{du}{2} = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{1+u^2}\,du \\
&= \frac{1}{2} \cdot \arctan(u) + C = \frac{1}{2} \cdot \arctan(2x+4) + C \qquad \text{(1 Punkt)}
\end{aligned}$$

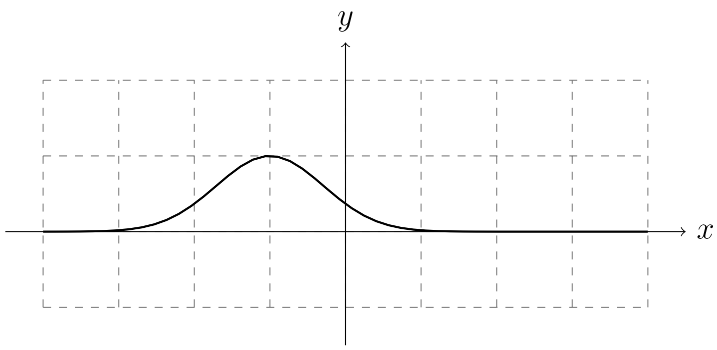
Aufgabe 4 (4 Punkte)

a) (1 Punkt) Das Argument $-x^2$ ist immer negativ, somit kann die Funktion $y = e^{-x^2}$ nur Werte zwischen 0 und 1 annehmen! Bei $x = 0$ wird der grösste Wert 1 angenommen. Für zunehmende Werte von x wird der Funktionswert immer kleiner. Es gilt $\lim_{x\to\pm\infty} \left(e^{-x^2}\right) = 0$.

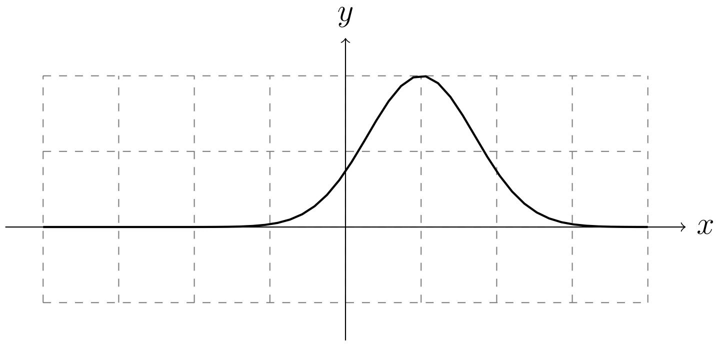


b) (1 Punkt) Wir setzen $f(x) = e^{-x^2}$ und $g(x) = x \cdot e^{-x^2}$. $g(x)$ kann nicht aus $f(x)$ hergeleitet werden. wegen dem Multiplikationsfakor x.

c) (1 Punkt) Wir setzen $f(x) = e^{-x^2}$ und $g(x) = e^{-(x+1)^2}$.
Es gilt: $g(x) = f(x - (-1))$. Somit wird die Funktion $f(x)$ um 1 Einheit nach links geschoben.



d) (1 Punkt) Wir setzen $f(x) = e^{-x^2}$ und $g(x) = 2 \cdot e^{-(x-1)^2}$.
Es gilt: $g(x) = 2 \cdot f(x - 1)$. Somit wird die Funktion $f(x)$ um 1 Einheit nach rechts geschoben und die Funktionswerte um den Faktor 2 gestreckt.



Aufgabe 5 (2 Punkte)

a) (1 Punkt) Um das gesuchte Integral bestimmen zu können, greifen wir auf $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + C$ zurück, wobei $|x| < 1$ ist. ($\frac{1}{2}$ Punkt)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4(1-\frac{1}{4}x^2)}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}}$$

Wir substituieren nun:

$$u(x) = \frac{x}{2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow \qquad dx = 2du$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1-(\frac{x}{2})^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{2du}{\sqrt{1-u^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= \arcsin(u) + C = \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) + C \qquad (\tfrac{1}{2} \text{ Punkt})$$

Mit $|\frac{x}{2}| < 1$ folgt: $|x| < 2$.

b) (1 Punkt) Um das gesuchte Integral bestimmen zu können, greifen wir auf $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C$ zurück. ($\frac{1}{2}$ Punkt)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2-4}\right| + C \qquad (\tfrac{1}{2} \text{ Punkt})$$

wobei $|x| > 2$ ist.