Übungsblatt 11

Der Begriff der Differentialgleichung, Storrer 15

Abgabe: Mittwoch, **06.12.2017**, vor der Vorlesung.

MUST

Aufgabe 1

a) Berechnen Sie das λ für $N'(t) = \lambda \cdot N(t)$, wenn Sie wissen, dass $N(t) = e^{10 \cdot t}$ ist.

b) Lösen Sie die DGL $y' = x$ mit $y(0) = 1$.

STANDARD

Aufgabe 2 (5 Punkte)
Gegeben sei die Differentialgleichung $y' = y - x^2 + 1$.

a) (2 Punkte) Zeichnen Sie das Richtungsfeld der DGL ein. Stellen Sie, wie im Storrer Seite-213 gezeigt, eine Tabelle auf. Betrachten Sie dabei alle ganzzahligen Werte für x und y im Bereich $-3 \leq x \leq 3$ und $-3 \leq y \leq 3$.

b) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass $y = x^2 + 2x + 1$ eine Lösung der DGL ist.

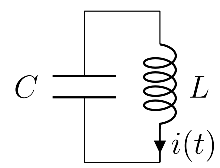
c) (2 Punkte) Markieren Sie die Punkte in der Tabelle von Teilaufgabe a), welche auf der Lösung $y = x^2 + 2x + 1$ liegen . Zeichnen Sie diese spezielle Lösung im Richtungsfeld von Teilaufgabe a) ein.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

a) (2 Punkte) Ein freier ungedämpfter (elektronischer) Schwingkreis kann mit der Differentialgleichung

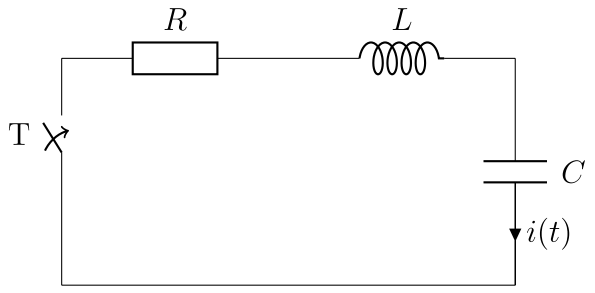
$$\ddot{i} + \omega_0^2 i = 0$$

beschrieben werden. ω_0 ist die Eigenfrequenz des Schwingkreises und berechnet sich aus $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.



Zeigen Sie, dass $i(t) = \widehat{I} \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi)$ die DGL erfüllt!

b) (4 Punkte) Wir betrachten nun eine schwache Dämpfung eines R-L-C Kreises. R ist ein ohmscher Widerstand, L ist eine Spule und C ist eine Kapazität.



Für die Lösung dieser Aufgabe brauchen Sie kein elektrotechnisches Wissen! Es geht nur um die Differentialgleichung.

Der Strom $i(t)$ erfüllt die DGL $\frac{d^2i}{dt^2} + 2\sigma\frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{i} + 2\sigma\dot{i} + \omega_0^2 i = 0$

$$\text{wobei} \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \sigma = \frac{R}{2L} \quad \text{sind.}$$

Zeigen Sie, dass

$$i(t) = \widehat{I}\sin(\omega t+\varphi)e^{-\sigma t} \qquad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \sigma^2} \quad \text{und} \quad \varphi : \text{Phasenverschiebung}$$

die DGL erfüllt. Gehen Sie wie folgt vor:

- (1 Punkt) Bestimmen Sie $\dot{i} = \frac{di}{dt}$
- (1 Punkt) Bestimmen Sie $\ddot{i} = \frac{d^2i}{dt^2}$
- (2 Punkte) Setzen Sie $\dot{i}$ und $\ddot{i}$ in die DGL ein

Aufgabe 4 (8 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass die Funktion y die Differentialgleichung erfüllt.

- (3 Punkte) $e^{-x}y'' + e^{-x}y' = 2x + 3 \quad$ mit $\quad y = xe^x$
- (3 Punkte) $xy'' - 2xy' + xy = -xe^x\sin(x) \quad$ mit $\quad y = e^x\sin(x)$

b) Bestimmen Sie die stationären Lösungen der folgenden Differentialgleichungen:

- (1 Punkt) $\dot{y} = y^2 + y - 2$
- (1 Punkt) $\dot{y} = y^3 - 2y^2 - y + 2$

Hinweis: Stationäre Lösungen sind zeitlich nicht mehr veränderliche Funktionen.

HONOURS

Aufgabe 5 (2 Punkte)
y ist eine differenzierbare Funktion in $\mathbb{R}$, die gemäss $y = f(x) \cdot \sin(x)$ faktorisiert werden kann. $f(x)$ ist eine differenzierbare Funktion in $\mathbb{R}$.
Zeigen Sie, dass y die DGL

$$y' = \left[\frac{f'(x)}{f(x)} + \cot(x)\right] \cdot y$$

erfüllt.