

Übungsblatt 3 - Lösung

Aufgabe 1

a) • $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -5 + 7 + 3 = 5$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 + 2 = 5$$

• $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} &= \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 7 - 3 \\ -3 - 5 \\ 5 - (-7) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 - 4 \\ -4 - 3 \\ 3 - (-2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 - (-1) \\ 1 - 2 \\ 2 - (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

• $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 - 20 \\ 8 - (-3) \\ 15 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$-\vec{b} \times \vec{a} = - \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 20 - (-2) \\ -3 - 8 \\ 4 - 15 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 22 \\ -11 \\ -11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -22 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}$$

b) Es gilt:

$$\vec{r} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + t \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 - 1 \\ 5 - 2 \\ 9 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

c) Es gilt:

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_A) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} \right) = 0$$
$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 3x + y + 2z - 26 = 0$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) (2 Punkte)

Richtungsvektor der Geraden: $\vec{UV} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Normalenvektor der Ebene: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (1 Punkt)

Skalarprodukt anwenden: $\vec{UV} \cdot \vec{n} = |\vec{UV}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos(\varphi)$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \sqrt{11} \cdot \sqrt{14} \cdot \cos(\varphi) \Leftrightarrow 8 = \sqrt{154} \cdot \cos(\varphi) \Rightarrow \varphi = 49.86^\circ$$

Der gesuchte Winkel ist der Komplementärwinkel zwischen Normalenvektor und Richtungsvektor, also $90^\circ - 49.865^\circ = 40.14^\circ$. (1 Punkt)

b) (2 Punkte) Setzen wir $z = t$, so müssen wir nun nach x und y auflösen:

$$9x + 6y = 12 - 3t \quad (1)$$

$$2x + y = 2 - t \quad (2)$$

(1 Punkt)

Man erhält nach kurzer Rechnung $x = -t$ und $y = t + 2$. Die Geradengleichung lautet dann:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ t + 2 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1 \text{ Punkt})$$

Aufgabe 3 (5 Punkte)

a) (3 Punkte) Aus dem Ansatz $\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$ folgt: (1 Punkt)

$$\begin{array}{l} (1) \quad \left| \begin{array}{l} \lambda_1 + 3\lambda_2 = 5 \\ 2\lambda_1 - 2\lambda_2 = 2 \end{array} \right| \div 2 \quad \Rightarrow \quad (1) \quad \left| \begin{array}{l} \lambda_1 + 3\lambda_2 = 5 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 1 \end{array} \right| \\ (2) \end{array}$$

$$(1) - (2) \Rightarrow 4\lambda_2 = 4 \Rightarrow \lambda_2 = 1 \quad \text{und aus (1) folgt sofort: } \lambda_1 = 2$$

$\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 1$ erfüllen die z-Komponente: $3 \cdot 2 + 1 = 7 \checkmark$ (1 Punkt)

Somit folgt: $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$. (1 Punkt)

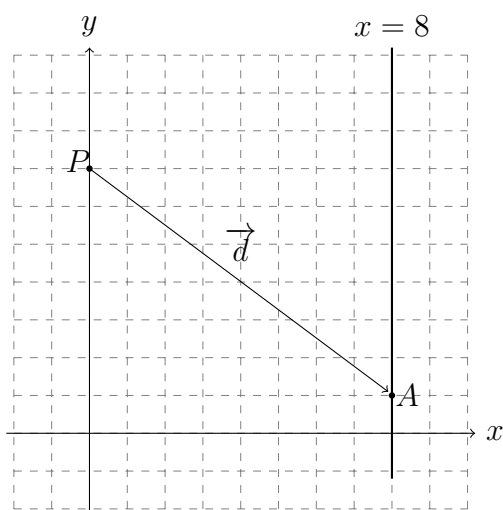
b) (2 Punkte) Aus dem Ansatz $\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$ folgt: (1 Punkt)

$$\begin{array}{l} (1) \quad \left| \begin{array}{l} \lambda_1 + 3\lambda_2 = 10 \\ 2\lambda_1 - 2\lambda_2 = -4 \end{array} \right| \div 2 \quad \Rightarrow \quad (1) \quad \left| \begin{array}{l} \lambda_1 + 3\lambda_2 = 10 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = -2 \end{array} \right| \\ (2) \end{array}$$

$$(1) - (2) \Rightarrow 4\lambda_2 = 12 \Rightarrow \lambda_2 = 3 \quad \text{und aus (1) folgt sofort: } \lambda_1 = 1$$

$\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = 3$ erfüllen die z-Komponente nicht: $3 \cdot 1 + 3 = 6 \neq 7$. Somit gibt es hier keine Linearkombination (1 Punkt)

Aufgabe 4 (3 Punkte)



Mit Hilfe der Skizze finden wir die Bedingung $d = |\overrightarrow{PA}|$.

(1 Punkt)

$$\begin{aligned}\vec{d} &= \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 8 \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ y - 7 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow d &= \sqrt{64 + (y - 7)^2}\end{aligned}$$

(1 Punkt)

$$\begin{aligned}\sqrt{64 + (y - 7)^2} &= 10 & | (\)^2 \\ 64 + (y - 7)^2 &= 100 & | - 64 \\ (y - 7)^2 &= 36 & | \sqrt{\dots} \\ y - 7 &= \pm 6 & | \end{aligned}$$

Wir erhalten zwei Lösungen: $y_1 = 13$ und $y_2 = 1$

(1 Punkt)

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Um die Richtung der Winkelhalbierenden der Vektoren \vec{a} und \vec{b} bestimmen zu können, muss man diese gleich lang machen.

Die Vektoren $|\vec{b}| \cdot \vec{a}$ und $|\vec{a}| \cdot \vec{b}$ haben die gleiche Länge.

(1 Punkt)

Damit kann die Richtung der Winkelhalbierenden der Vektoren \vec{a} und \vec{b} bestimmt werden. Es sind die Vektoren $\vec{w}_1 = |\vec{b}| \cdot \vec{a} + |\vec{a}| \cdot \vec{b}$ und $\vec{w}_2 = |\vec{b}| \cdot \vec{a} - |\vec{a}| \cdot \vec{b}$

(1 Punkt)

Nun ist zu zeigen, dass $\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 = 0$ ist.

$$\begin{aligned}\vec{w}_1 \cdot \vec{w}_2 &= (|\vec{b}| \cdot \vec{a} + |\vec{a}| \cdot \vec{b}) \cdot (|\vec{b}| \cdot \vec{a} - |\vec{a}| \cdot \vec{b}) = |\vec{b}|^2 \cdot \vec{a}^2 - \underbrace{|\vec{a}||\vec{b}| \cdot \vec{a}\vec{b} + |\vec{a}||\vec{b}| \cdot \vec{b}\vec{a}}_{0, \text{ da } \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}} - |\vec{a}|^2 \cdot \vec{b}^2 \\ &= |\vec{b}|^2 \cdot \vec{a}^2 - |\vec{a}|^2 \cdot \vec{b}^2 = |\vec{b}|^2 \cdot |\vec{a}|^2 - |\vec{a}|^2 \cdot |\vec{b}|^2 = 0 \quad \text{QED}\end{aligned}$$

(1 Punkt)