Institut für Mathematik
A. Kresch 11.05.2017

Lineare Algebra II

Frühjahrssemester 2017 - Übungsblatt 11

Abgabe Donnerstag, 18.05.2017, vor der Vorlesung im Raum Y03G95

1 Sei K ein Körper, seien U, V und W Vektorräume über K. Zeigen Sie mithilfe der universellen Eigenschaft, dass durch $(u,v)\otimes w \mapsto (u\otimes w, v\otimes w)$ für $u\in U$, $v\in V$ und $w\in W$ ein Isomorphismus

$$(U\oplus V)\otimes_K W \cong (U\otimes_K W)\oplus(V\otimes_K W)$$

gegeben ist.

(5 Punkte)

2 Sei K ein Körper, seien m und n natürliche Zahlen. Aus der Vorlesung haben wir den Isomorphismus

$$K^m\otimes_K K^n \cong K^{mn},$$

der durch $e_i\otimes e'_j := \tilde{e}_{(i-1)n+j}$ gegeben ist. Dabei wird mit $e_1, \dots, e_m$ die Standardbasis von K^m, mit $e'_1, \dots, e'_n$ die Standardbasis von K^n und mit $\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_{mn}$ die Standardbasis von K^{mn} bezeichnet. Seien $A=(a_{ij})\in \mathrm{M}_m(K)$ und $B=(b_{ij})\in \mathrm{M}_n(K)$ quadratische Matrizen und $f\colon K^m\to K^m$, $f(\mathbf{x}) := A\mathbf{x}$ und $g\colon K^n\to K^n$, $g(\mathbf{y}) := B\mathbf{y}$ die entsprechenden Endomorphismen. Beschreiben Sie die quadratische Matrix, die bezüglich der Standardbasis von K^{mn} den Endomorphismus

$$K^{mn}\cong K^m\otimes_K K^n \xrightarrow{f\otimes g} K^m\otimes_K K^n \cong K^{mn}$$

darstellt.

(5 Punkte)

3 Sei K ein Körper, seien V und W Vektorräume über K und $v\in V$ und $w\in W$ von Null verschiedene Vektoren. Zeigen Sie: für $v'\in V$ und $w'\in W$ gilt $v\otimes w = v'\otimes w'$ in $V\otimes_K W$ nur dann, wenn es ein $\lambda\in K^\times$ mit $v'=\lambda v$ und $w'=\lambda^{-1}w$ gibt.

(4 Punkte)

4 Sei $U := \mathbb{R}^2\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{R}^2$. Mit e_1, e_2 wird wie üblich die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ bezeichnet.

(a) Sei $u := e_1\otimes e_1 + e_2\otimes e_2\in U$. Zeigen Sie, dass u nicht als $v\otimes v'$ mit v, $v'\in\mathbb{R}^2$ geschrieben werden kann.

(b) Finden Sie v, v', w, $w'\in\mathbb{R}^2$, so dass der Ausdruck

$$u = v\otimes v' + w\otimes w'$$

gültig ist und weder $v\otimes v'$ noch $w\otimes w'$ ein Vielfaches von $e_1\otimes e_1$ oder $e_2\otimes e_2$ ist.

(6 Punkte)