Institut für Mathematik
A. Kresch 04.05.2017

Lineare Algebra II

Frühjahrssemester 2017 - Übungsblatt 10

Abgabe Donnerstag, 11.05.2017, vor der Vorlesung im Raum Y03G95

1 Identifizieren Sie für jede der folgenden universellen Eigenschaften die entsprechende und schon vorher in der Vorlesung (Lineare Algebra I oder II) eingeführte Konstruktion. Dabei gilt folgende Notation: K ist ein Körper, U und V sind Vektorräume über K und $f\colon U \to V$ ist eine lineare Abbildung.

(a) W ist ein K-Vektorraum mit linearer Abbildung $g\colon V \to W$, so dass $g \circ f = 0$ und es gibt für jeden K-Vektorraum T mit linearer Abbildung $h\colon V \to T$ und $h \circ f = 0$ eine eindeutige lineare Abbildung $\ell\colon W \to T$ mit $\ell \circ g = h$.

(b) W ist ein K-Vektorraum mit linearen Abbildungen $g_1\colon U \to W$ und $g_2\colon V \to W$, so dass für jeden K-Vektorraum T mit linearen Abbildungen $h_1\colon U \to T$ and $h_2\colon V \to T$ es eine eindeutige lineare Abbildung $\ell\colon W \to T$ gibt, so dass $\ell \circ g_1 = h_1$ und $\ell \circ g_2 = h_2$.

(c) W ist ein K-Vektorraum mit einer Abbildung von Mengen $\varphi\colon U \to W$, so dass für jeden K-Vektorraum T mit Abbildung von Mengen $\psi\colon U \to T$ es eine eindeutige lineare Abbildung $g\colon W \to T$ mit $g \circ \varphi = \psi$ gibt.

(12 Punkte)

2 Mit der Notation aus der vorigen Übung sind weitere – aber fehlerhafte – universelle Eigenschaften aufgeführt. Jeweils gibt es entweder keinen K-Vektorraum mit der Eigenschaft oder ist der K-Vektorraum nicht eindeutig bestimmt bis auf Isomorphismus. Woran scheitert die angebliche universelle Eigenschaft?

(a) W ist ein K-Vektorraum mit linearer Abbildung $g\colon W \to U$, so dass für jeden K-Vektorraum T mit linearer Abbildung $h\colon T \to U$ es eine lineare Abbildung $k\colon T \to W$ mit $g \circ k = h$ gibt.

(b) W ist ein K-Vektorraum mit einer Abbildung von Mengen $\varphi\colon W \to U$, so dass für jeden K-Vektorraum T mit Abbildung von Mengen $\psi\colon T \to U$ es eine eindeutige lineare Abbildung $g\colon T \to W$ mit $\varphi \circ g = \psi$ gibt.

(8 Punkte)