Institut für Mathematik
A. Kresch 27.04.2017

Lineare Algebra II

Frühjahrssemester 2017 - Übungsblatt 9

Abgabe Donnerstag, 04.05.2017, vor der Vorlesung im Raum Y03G95

1 Finden Sie eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ (mit dem Standardskalarprodukt), bezüglich derer die symmetrische Bilinearform $s\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$s(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := 5x_1y_1 + 11x_2y_2 + 6x_1y_3 + 6x_3y_1 - 6x_2y_3 - 6x_3y_2 - 2x_3y_3,$$

durch eine Diagonalmatrix dargestellt wird. Benutzen Sie Ihre Antwort, um die Lösungsmenge der Gleichung

$$q(\mathbf{x}) = 1$$

in $\mathbb{R}^3$ zu skizzieren, wobei mit q die zu s assoziierte quadratische Form bezeichnet wird.

(10 Punkte)

2 Sei $n \geq 2$ und sei $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R})$ eine symmetrische Matrix, mit der Eigenschaft, dass alle Hauptminoren ≥ 0 sind, in Symbolen:

$$\det\big((a_{ij})_{1\leq i,j\leq k}\big) \geq 0 \qquad \text{für } k = 1, \ldots, n.$$

Folgt es stets, dass A positiv semidefinit ist, oder gibt es für ein $n \geq 2$ eine solche Matrix A mit

$${}^t\mathbf{x}\, A\, \mathbf{x} < 0$$

für ein $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$?

(4 Punkte)

3 Entscheiden Sie jeweils, ob der angegebene Endomorphismus $F\colon V \to V$ normal ist.

(a) $V := \mathbb{R}^3$ mit Standardskalarprodukt, $F(\mathbf{x}) := A\mathbf{x}$ mit

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) $V := \mathbb{C}^2$ mit Standardskalarprodukt, $F(\mathbf{x}) := A\mathbf{x}$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & i \end{pmatrix}$$

(c) $V := \mathbb{C}[x]_{\leq 2}$ mit $\langle g, h\rangle := \int_{-1}^{1} g(x)\overline{h(x)}dx$ und F gegeben durch die Ableitung,

$$F(g) := g'.$$

(6 Punkte)