Institut für Mathematik 13.04.2017
A. Kresch

Lineare Algebra II

Frühjahrssemester 2017 - Übungsblatt 8

Abgabe Donnerstag, 27.04.2017, vor der Vorlesung im Raum Y03G95

1 Sei V ein endlichdimensionaler reeller Vektorraum und $s\colon V \times V \to \mathbb{R}$ eine symmetrische Bilinearform der Signatur (n_+, n_-, n_0), d.h., n_+ ist die maximale Dimension eines Untervektorraums, auf dem die Einschränkung von s positiv definit ist, n_- ist die maximale Dimension eines Untervektorraums, auf dem die Einschränkung von s negativ definit ist, und n_0 ist die Dimension des Ausartungsraums von s. Sei zudem $n_{\geq 0}$ die maximale Dimension eines Untervektorraums, auf dem die Einschränkung von s positiv semidefinit ist, und $n_{\leq 0}$ die maximale Dimension eines Untervektorraums, auf dem die Einschränkung von s negativ semidefinit ist. Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} n_{\geq 0} &= n_+ + n_0, \\ n_{\leq 0} &= n_- + n_0. \end{aligned}$$

(6 Punkte)

2 Bestimmen Sie die Signatur (n_+, n_-, n_0) der folgenden symmetrischen Bilinearform auf dem reellen Vektorraum $V := \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ der Polynome vom Grad ≤ 3:

$$\begin{aligned} s\colon V \times V &\to \mathbb{R}, \\ s(f,g) &:= \int_{-1}^{1} f(x)g(x)(35x^4 - 30x^2 + 3)dx. \end{aligned}$$

(8 Punkte)

3 Sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(6 \times 6, \mathbb{R}).$$

(a) Zeigen Sie, dass die Matrix A zu $-A$ kongruent ist.

(b) Verifizieren Sie: $\mathrm{rk}(A) = 6$.

(c) Bestimmen Sie anhand von (a) und (b) die Signatur der zu A assoziierten Bilinearform

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto {}^t\mathbf{x}\, A\, \mathbf{y}$$

auf $\mathbb{R}^6$.

(6 Punkte)