Institut für Mathematik
A. Kresch 16.03.2017

Lineare Algebra II

Frühjahrssemester 2017 - Übungsblatt 4

Abgabe Donnerstag, 23.03.2017, vor der Vorlesung im Raum Y03G95

1 Entscheiden Sie jeweils für die angegebene Metrik d auf $\mathbb{R}^2$: (i) ob d dieselbe Topologie auf $\mathbb{R}^2$ (d.h., Menge der offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^2$) definiert wie die euklidische Metrik, (ii) ob d aus einer Norm auf $\mathbb{R}^2$ stammt und in diesem Fall (iii) ob die Norm aus einem Skalarprodukt stammt.

(a) $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \begin{cases} \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}, & \text{falls } x_1y_2 = x_2y_1, \\ \sqrt{x_1^2+x_2^2}+\sqrt{y_1^2+y_2^2}, & \text{sonst.} \end{cases}$

(b) $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \max(|x_1-y_1|, |x_2-y_2|)$.

(c) $d(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_1-y_1)(x_2-y_2)+(x_2-y_2)^2}$.

(8 Punkte)

2 Sei v_1, v_2 eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$ mit Standardskalarprodukt. Zeigen Sie, dass es ein $\theta \in \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$v_1 = (\cos\theta, \sin\theta) \qquad \text{und} \qquad v_2 = \pm(-\sin\theta, \cos\theta).$$

(3 Punkte)

3 Finden Sie ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$, für das

$$(1,2), \quad (3,4)$$

eine Orthonormalbasis ist.

(3 Punkte)

4 Sei $V := \mathbb{R}^4$ mit Standardskalarprodukt und seien

$$v_1 := \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \qquad v_2 := \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{5}{6}\right) \in V.$$

(a) Verifizieren Sie, dass v_1, v_2 eine orthonormale Familie ist.

(b) Beschreiben Sie durch Matrizen die eindeutig bestimmenten linearen Abbildungen $V \to V$, die durch $w \mapsto w'$ und $w \mapsto w''$ mit

$$w' \in \operatorname{span}(v_1, v_2), \qquad w'' \in \operatorname{span}(v_1, v_2)^\perp, \qquad w = w' + w''$$

gegeben sind.

(c) Finden Sie eine Erweiterung zu einer Orthonormalbasis v_1, v_2, v_3, v_4 von V.

(6 Punkte)