Institut für Mathematik
A. Kresch

23.02.2017

Lineare Algebra II

Frühjahrssemester 2017 - Übungsblatt 1

Abgabe Donnerstag, 02.03.2017, vor der Vorlesung im Raum Y03G95

1 Welche dieser Teilmengen sind Ideale? Finden Sie jeweils, für die Ideale, ein Element, dass das Ideal erzeugt.

(a) $\mathbb{Q}[T] \subset \mathbb{R}[T]$ (b) $\{a + b\sqrt{-1} \,|\, a, b \in \mathbb{Z},$ beide gerade oder beide ungerade$\} \subset \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$
(c) $\{0\} \cup \{\pm m \,|\, m \in \mathbb{N}_{>0}$ ist zusammengesetzt$\} \subset \mathbb{Z}$ (d) $\{f \in \mathbb{F}_2[T] \,|\, f(A) = 0\} \subset \mathbb{F}_2[T]$

wobei $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{F}_2)$ in (d).

(5 Punkte)

2 Führen Sie jeweils elementare Zeilen- und Spaltenumformungen auf, die die Matrix in Smith-Normalform bringt.

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 0 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(3 \times 3, \mathbb{Z})$ (b) $\begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T+1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2 \times 2, \mathbb{Q}[T])$

(6 Punkte)

3 Finden Sie jeweils r, $s \in \mathbb{N}$ und von Null verschiedene Nichteinheiten $a_1, \dots, a_r \in R$, so dass $a_i \mid a_{i+1}$ für alle $1 \le i \le r-1$ und $M \cong R/a_1R \oplus \cdots \oplus R/a_rR \oplus R^s$.

(a) $R = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \oplus Z/5\mathbb{Z}$.
(b) $R = \mathbb{Q}[T]$, $M = \{(f, g) \in \mathbb{Q}[T]^2 \,|\, Tf + (T+1)g = 0\}$.
(c) $R = \mathbb{R}[T]$, M ist der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}[X]_{\le 2}$ aller quadratischen reellen Polynome mit

$$T \cdot (aX^2 + bX + c) := a(X+1)^2 + b(X+1) + c$$

für a, b, $c \in \mathbb{R}$.

(9 Punkte)